ESERCIZI SU ANALISI DIMENSIONALE

1. Trovare le dimensioni delle quantità in grassetto,
   sapendo che le dimensioni della forza F sono [MLT^{-2}] ed r è una distanza.

   (a) $F = -\boldsymbol{k}x$

   [F] = [k][x]
   MLT^{-2} = [k] L
   [k] = MT^{-2} → kg/s^2

   (b) $F = \boldsymbol{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}$

   [F] = [G][m_1][m_2][r]$^{-2}$
   MLT^{-2} = [G]MML^{-2}
   [G]=$M^{-1}L^3T^{-2}$ → $kg^{-1}m^3s^{-2}$

2. Quali sono le dimensioni delle derivate $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{d^2x}{dt^2}$?

   Le dimensioni sono rispettivamente LT^{-1} e LT^{-2}

3. La forza centripeta è responsabile della rotazione di un corpo di massa m su una circonferenza di raggio r a velocità v. Si trovi la forma matematica della forza centrifuga mediante l'analisi dimensionale.

   Si postuli che la forza centripeta dipenda dalla massa, dalla velocità e dal raggio della circonferenza su cui ruota. Pertanto:

$$F \propto m^x v^y r^z$$

   [F] = $[m]^x[v]^y[r]^z$
   $MLT^{-2} = M^x L^{y+z} T^{-y}$

   Risolto il sistema si ottiene: $F \propto m^1 v^2 r^{-1} = \frac{mv^2}{r}$

4. Dimostrare che le seguenti grandezze si possono sommare.

Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Energia potenziale gravitazionale	$U = mgh$
Lavoro	$L = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$

Deve significare che le tre grandezze in esame abbiano le stesse unità di misura. Infatti:

$[K] = [m][v]^2 = ML^2T^{-2}$
$[U] = [m][g][h] = ML^2T^{-2}$
$[L] = [F][s] = ML^2T^{-2}$

5. Dimostrare che le seguenti grandezze si possono sommare.

Impulso	$\Delta\bar{p} = \int F \, \mathrm{d}t$
Quantità di moto	$p = mv$

$[\Delta p] = [F][t] = MLT^{-1}$
$[p] = [m][v] = MLT^{-1}$

6. Trovare la dipendenza del periodo T di un oscillatore armonico dalla costante elastica della molla k e dal valore della massa m ivi attaccata mediante l'analisi dimensionale.

Si postula:

$$T \propto m^x k^y$$

$[T] = [m]^x[k]^y$

Sapendo che le dimensioni della costante elastica sono $[k] = M\,T^{-2}$ (si veda esercizio 1), pertanto:

$T = M^{x+y}T^{-2y}$.

Risolto il sistema

$$T \propto m^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

7. Verificare dimensionalmente le seguenti equazioni, sapendo che U è l'energia potenziale (vedi esercizio 4) le cui dimensioni sono $[ML^2T^{-2}]$, k è la costante elastica (vedi esercizio 1), g è l'accelerazione di gravità ed A è una ampiezza la cui dimensione è la lunghezza

   (a) $U = mgh$ → $[ML^2T^{-2}] = M\,[LT^{-2}]\,L$

   (b) $m = \frac{Ft}{v}$ → $\mathrm{M} = \frac{[\mathrm{MLT^{-2}}]\mathrm{T}}{\mathrm{LT^{-1}}}$

   (c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ → $\mathrm{T} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{MT^{-2}}}}$

   (d) $E = \frac{1}{2}kx^2$ → $[ML^2T^{-2}] = [MT^{-2}]\,L^2$

   (e) $x = A\sin(\omega t + \phi)$ → L = L

8. Nelle seguenti equazioni prese dalla termodinamica si trovino le dimensioni delle quantità incognite scritte in grassetto e si lavori nel Sistema Internazionale.
   Hint: il calore *Q* si misura in Joule ovvero J = kg $m^2\,s^{-2}$, T è la temperatura, l è una lunghezza, p è una pressione le cui dimensioni sono kg $m^{-1}\,s^{-2}$ = Pa (Pascal) = J m^{-3}, V è un volume ed n è il numero di moli.

   (a) $Q = m\boldsymbol{c}\,\Delta T$ → kg $m^2\,s^{-2}$ = kg [**c**] K → [**c**] = $m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$ = J $kg^{-1}\,K^{-1}$

   (b) $\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta T}$ → [**λ**] = m^{-1} m K^{-1} = K^{-1}

   (c) $pV = n\boldsymbol{R}T$ → J m^{-3} m^3 = mol [**R**] K → [**R**] = J $mol^{-1}\,k^{-1}$