

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Compito di Calcolo delle Probabilità
13 Luglio 2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

QUESITO TEORICO

Fornire la definizione di probabilità condizionata. Enunciare e dimostrare la Legge delle Alternative e il Teorema di Bayes.

Esercizio 1

Data la variabile aleatoria normale X di parametri $\mu=20$ e $\sigma^2=9$, si calcoli

- a) $P(X>25)$
- b) $P(X<16)$
- c) $P(18<X<21)$

Esercizio 2

Supponiamo che presso un ospedale il numero di casi di una certa malattia diagnosticati al mese sia distribuito come una variabile aleatoria di Poisson con parametro $\lambda = 4.5$.

- a) Qual è la probabilità che in un mese sia diagnosticato un unico caso della malattia?
- b) Qual è la probabilità che in un mese siano diagnosticati più di tre casi della malattia?

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} c(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare c affinché $f(x,y)$ risulti una densità di probabilità.

Con il valore di c determinato, siano X e Y due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta $f(x, y)$.

- a) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ delle variabili aleatorie X e Y .
- b) X e Y sono indipendenti?
- c) Calcolare $E(X)$ ed $E(Y)$.

Compito calcolo delle probabilità

13/07/2018



Esercizio 1

$$X \sim N(20, 9)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{X - 20}{3} \sim N(0, 1)$$

$$a) P(X > 25) = P\left(\frac{X - 20}{3} > \frac{25 - 20}{3}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{5}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{5}{3}\right) =$$

$$= 1 - 0,9525 = 0,0475$$

$$b) P(X < 16) = P\left(\frac{X - 20}{3} < \frac{16 - 20}{3}\right) =$$

$$P\left(Z < -\frac{4}{3}\right) = P\left(Z > \frac{4}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{4}{3}\right) =$$

$$= 1 - 0,9083 = 0,0917$$

$$c) P(18 < X < 21) = P\left(\frac{18 - 20}{3} < \frac{X - 20}{3} < \frac{21 - 20}{3}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{2}{3} < Z < \frac{1}{3}\right) = P(Z < 0,33) - P(Z < -0,67)$$

$$= 0,6293 - P(Z > 0,66) = 0,6293 - 1 + P(Z \leq 0,67)$$

$$= 0,6293 + 0,7486 - 1 = 0,3779$$

Esercizio 2

X v.e. di Poisson

$$\lambda = 4,5 = E(X)$$

$$P(X = k) = e^{-4,5} \frac{(4,5)^k}{k!}$$

$$a) P(X=4) = e^{-4,5} \frac{(4,5)^4}{4!} = 0,0499$$

$$b) P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) =$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$$

$$= 1 - e^{-4,5} \frac{(4,5)^0}{0!} - e^{-4,5} \frac{(4,5)^1}{1!} +$$

$$- e^{-4,5} \frac{(4,5)^2}{2!} - e^{-4,5} \frac{(4,5)^3}{3!} = 0,66$$

Exercício 3

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{(1-x)} & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outros} \end{cases}$$

i) $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \boxed{c \geq 0}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 c(1-x) dy =$$

$$= c \int_0^1 (1-x) [y]_0^1 dx = c \int_0^1 (1-x) dx =$$

$$= c \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = c \left[1 - \frac{1}{2} \right] = c \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c=2}$$

De i) e ii) segue que por $c=2$ $f(x,y) e^{-x}$ uma

densità di probabilità



$$a) f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Se $0 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 e(1-x) dy = \\ = 2(1-x) [y]_0^1 = 2(1-x)$$

Per $x < 0$; $x > 1$ $f(x) = 0$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Se $0 \leq y \leq 1$

$$f_y(y) = \int_0^1 2(1-x) dx = 2 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \frac{1}{2} = 1$$

Se $y < 0$, $y > 1$ $f_y(y) = 0$

Riassumendo

$$f_x(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; f_y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

b) Poiché $f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

X e Y sono v.a. indipendenti.

$$c) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 2 \int_0^1 x (1-x) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$