Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Compito di Calcolo delle Probabilità
29 Giugno 2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

QUESITO TEORICO

Enunciare il Teorema del limite centrale. Presentare la variabile aleatoria gaussiana, calcolarne valor medio e varianza e descrivere il legame con la variabile aleatoria gaussiana standardizzata.

Esercizio 1

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & se \quad 0 \le x < 1 \\ c & se \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & altrove. \end{cases}$$

a) Determinare c affinché f risulti la densità di probabilità di una variabile aleatoria assolutamente continua X.

b) Determinare la funzione di distribuzione, il valor medio e la varianza di X.

Esercizio 2

Da una indagine svolta su un campione di 230 donne e 170 uomini, emerge che il 65% degli uomini e il 35% delle donne in esame fumano.

a) Determinare la probabilità che, selezionando casualmente una persona nel campione in esame, essa sia un fumatore;
b) determinare la probabilità che, scelta a caso una persona nel campione in esame che sta fumando, questa sia una donna.

Esercizio 3

Supponiamo di lanciare una moneta non truccata 3 volte. Sia (X,Y) la variabile casuale doppia così definita:

X: numero di risultati Testa nei 3 lanci;
Y: numero di risultati Testa nell'ultimo lancio.

Con riferimento alla variabile aleatoria doppia (X,Y)
(a) indicare lo spazio campione relativo all'esperimento;
(b) indicare i possibili valori della v.a. doppia (X, Y)
(c) determinare le densità di probabilità marginali;
(d) determinare la covarianza di X e Y;
(e) X e Y sono indipendenti?

Compito di Probabilità

29/06/2018

1) $f(x) = \begin{cases} c\,x^3 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ c & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

a) i) $f(x) \geq 0 \iff c \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \iff$

$1 = \int_0^1 c\,x^3\,dx + \int_1^2 c\,dx = c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + c\left[x\right]_1^2$

$= \frac{c}{4} + c = \frac{5}{4}c \iff \boxed{c = \frac{4}{5}}$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

• Se $x < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

• Se $0 \le x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{4}{5} t^3\,dt =$

$= \frac{4}{5}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x = \frac{x^4}{5}$

• Se $1 \le x \le 2 \Rightarrow F(x) = \int_0^1 \frac{4}{5} x^3\,dx + \int_1^x \frac{4}{5}\,dt =$

$= \frac{4}{5}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{4}{5}\left[t\right]_1^x = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$

• Se $x > 2$ $\quad F(x) = \int_0^1 \frac{4}{5} x^3\,dx + \int_1^2 \frac{4}{5}\,dx = 1$

per quanto provato al punto a).

Riassumendo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x^4}{5} & 0 < x \le 1 \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} & 1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{4}{5}\int_0^1 x \cdot x^3\, dx + \frac{4}{5}\int_1^2 x\, dx =$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{25} + \frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{4+30}{25} = \frac{34}{25}$$

$$\text{var } X = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(\frac{34}{25}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^1 x^5\, dx + \frac{4}{5}\int_1^2 x^2\, dx - \left(\frac{34}{25}\right)^2 = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{5}\left[\frac{x^6}{\cancel{6}_{\,3}}\right]_0^1 +$$

$$+ \frac{4}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left(\frac{34}{25}\right)^2 = \frac{2}{15} + \frac{28}{15} - \left(\frac{34}{25}\right)^2 =$$

$$= 2 - \frac{1156}{625} = \frac{94}{625}$$

2) $E_1 = \{$viene selezionata una donna$\}$ $P(E_1) = \frac{230}{400} = \frac{23}{40}$

$E_2 = \{$viene selezionato un uomo$\}$ $P(E_2) = \frac{170}{400} = \frac{17}{40}$

$E = \{$la persona ~~viene~~ selezionata ama fumare$\}$

$P(E/E_1) = 0,35$ $P(E/E_2) = 0,65$

a) $P(E) = P(E|E_1)\,P(E_1) + P(E|E_2)\,P(E_2)$

$= 0{,}35 \cdot \frac{23}{40} + 0{,}65 \cdot \frac{17}{40} = 0{,}4775$

b) $P(E_1|E) = \dfrac{P(E|E_1)\,P(E_1)}{P(E)} =$

$= 0{,}421$

3) a) $\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} (T,T,T), & (T,C,T), & (T,T,C), & (T,C,C) \\ (C,T,T), & (C,C,T), & (C,T,C), & (C,C,C) \end{array} \right\}$

b) (X,Y) può assumere i valori:

$(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ $(3,1)$

c)

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
3	0	$\frac{1}{8}$
	$P(Y=0)=\frac{4}{8}$	$P(Y=1)=\frac{4}{8}$

$P(X=0)=\frac{1}{8}$

$P(X=1)=\frac{3}{8}$

$P(X=2)=\frac{3}{8}$

$P(X=3)=\frac{1}{8}$

d) $E(X) = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$E(Y) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$E(X\cdot Y) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

e) X, Y non indipendenti, poiché $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$