

Prof.ssa Matilde Pietrafesa – Prof. A. Nucara

Università Mediterranea

Dipartimento DIIES

Fisica Tecnica per Elettronica

Obiettivi formativi

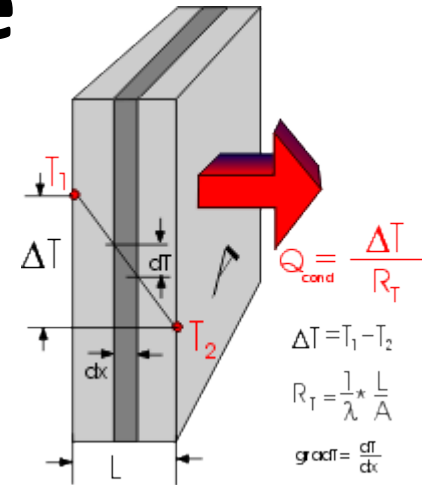


Il corso fornisce le nozioni di base relative ai diversi meccanismi di trasmissione del calore (**conduzione, convezione ed irraggiamento**), in regime stazionario e transitorio, ed alle loro applicazioni nell'ambito dell'elettronica, soffermandosi in particolare sulle tecniche ed i sistemi di raffreddamento delle apparecchiature elettroniche e dei sistemi fotovoltaici.

Trasmissione del calore in regime stazionario

a) Conduzione

- Legge di Fourier
- Equazione generale della conduzione
- Conduzione monodimensionale senza generazione di calore
 - geometrie piane, cilindriche e sferiche con conducibilità termica costante o variabile con la temperatura
 - sistemi composti con conducibilità termica costante
- Analogia elettrica
- Conduzione monodimensionale con generazione di calore
- Conduzione bi e tridimensionale senza generazione di calore

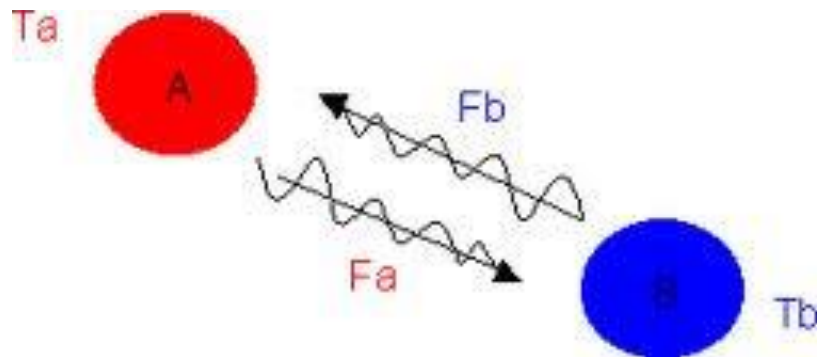


b) Convezione

- Convezione forzata, naturale e mista
- Equazioni fondamentali del moto non isoterma
- Analisi dimensionale
- Raggruppamenti adimensionali (numeri di Nusselt, Prandtl, Grashof e Reynolds)



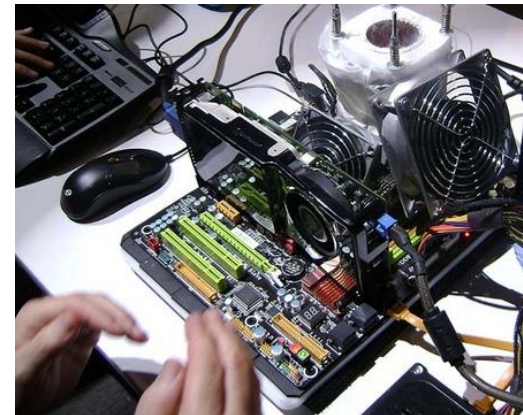
c) Irraggiamento



- Radiazioni termiche
- Grandezze e leggi fondamentali (Planck, Stefan-Boltzmann, Wien)
- Riflessione, trasmissione ed assorbimento
- Corpi neri, grigi e reali
- Radiosità
- Scambio termico fra superfici nere e grigie - Fattori di vista

Trasmissione del calore in regime transitorio

- Sistemi a parametri concentrati (sistemi con resistenza interna trascurabile)
- Conduzione termica in regime variabile
- Metodi numerici di soluzione dell'equazione di scambio termico in transitorio
- Metodo delle differenze finite:
formulazione esplicita ed implicita



Raffreddamento delle apparecchiature elettroniche

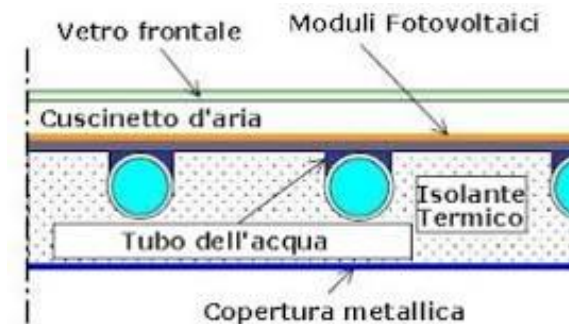
- Carico termico nelle apparecchiature elettroniche
- Raffreddamento:
 - a) per conduzione
 - b) ad aria (in convezione naturale ed irraggiamento; in convezione forzata)
 - c) a liquido
 - d) ad immersione
- Sistemi di raffreddamento :
 - Alette e piastre di raffreddamento
 - Ventilatori
- Sistemi di rilevamento della temperatura (termocamere).



Raffreddamento dei sistemi fotovoltaici



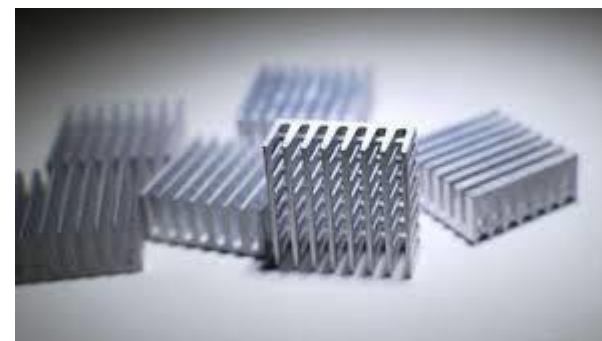
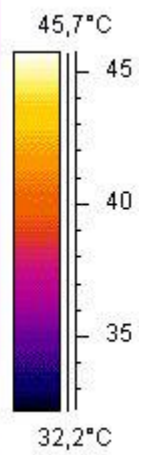
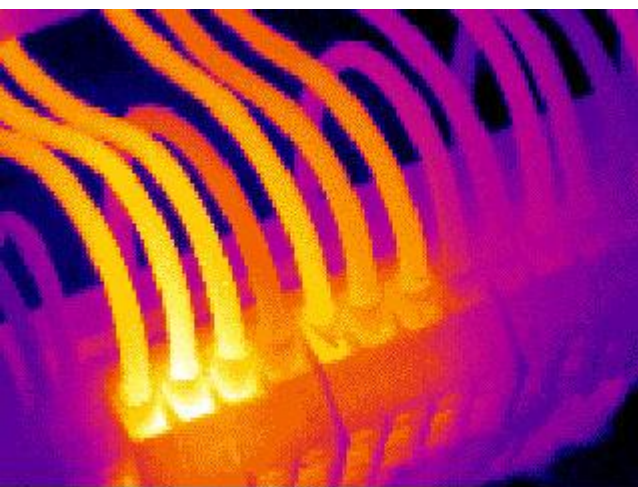
- Energia solare
- Sfruttamento dell'energia solare per la produzione di energia elettrica e termica
- Raffreddamento dei sistemi fotovoltaici mediante scambiatori di calore
 - Metodo della differenza di temperatura media logaritmica
 - Metodo dell'efficienza
- Pannelli fotovoltaici termici (Sistemi PVT)
- Sistemi di accumulo energetico



Testi Consigliati

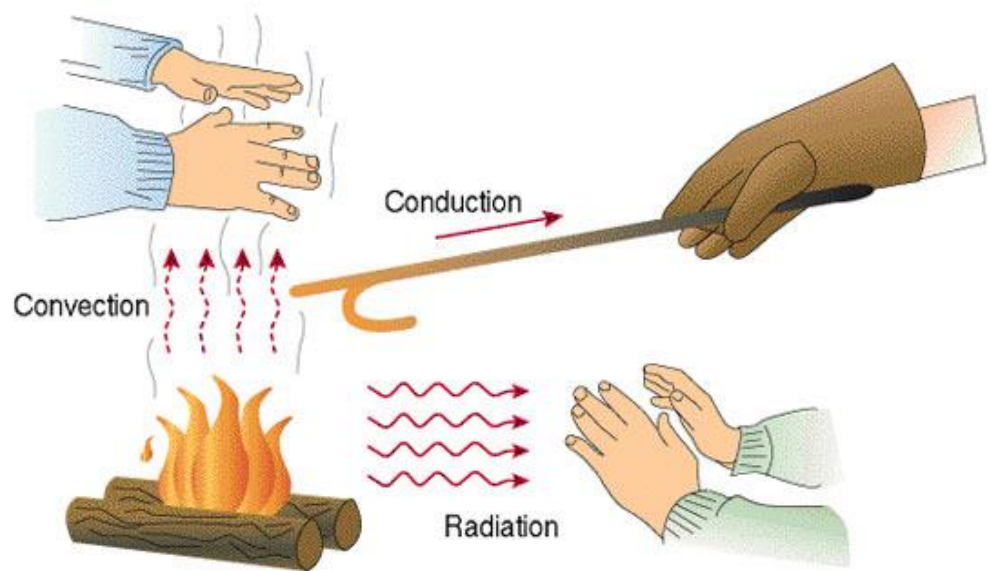
- F. Kreith – ***Principi di Trasmissione del Calore*** – ed. Liguori.
- Y. Cengel – ***Termodinamica e trasmissione del calore*** – McGraw-Hill
- G. Guglielmini, C. Pisoni – ***Elementi di trasmissione del calore*** – Ed. Veschi





Trasmissione del calore

- Conduzione
- Convezione
- Irraggiamento



Scambio termico: trasmissione di energia da una regione ad un'altra dovuta ad una differenza di temperatura.

Calore

Non si può parlare di contenuto di calore di un corpo, essendo esso energia in transito, riconoscibile solo quando attraversa il contorno di un sistema.



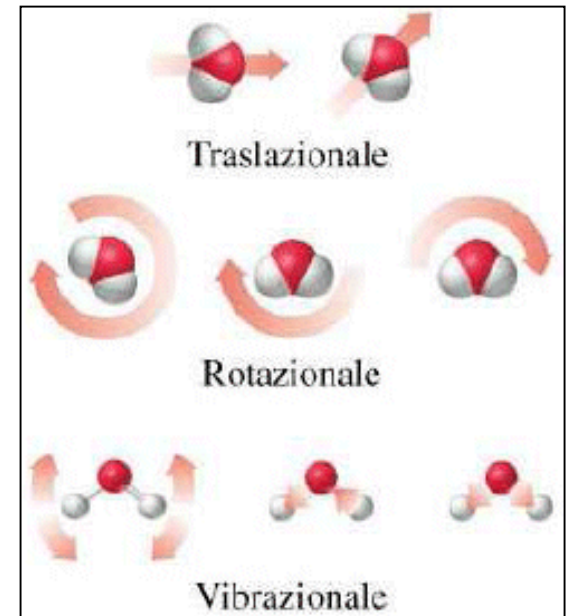
La spiegazione fisica della sua natura si è avuta con lo sviluppo della *teoria cinetica molecolare*.

Energia interna

Le particelle durante il loro moto possono traslare, vibrare una relativamente all'altra o ruotare attorno ad un asse.

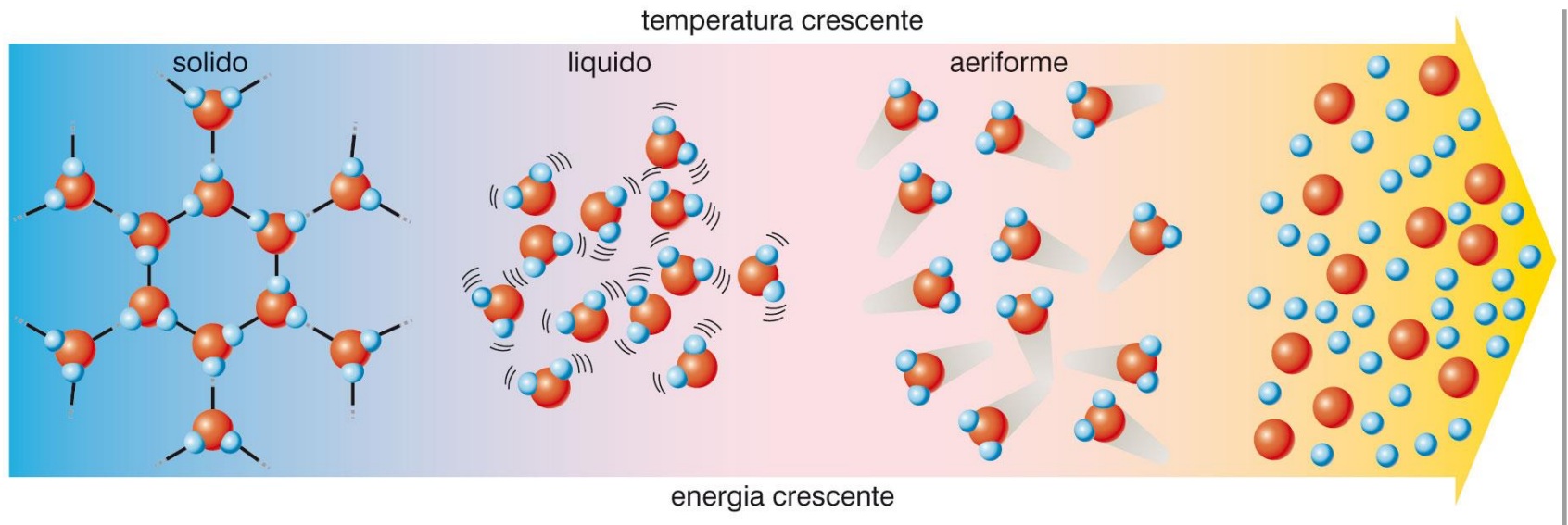
A questi moti sono associate le energie cinetiche di traslazione, vibrazione e rotazione, la cui somma costituisce l'**energia cinetica** di una molecola.

La somma delle energie cinetica e potenziale di tutte le molecole che costituiscono il sistema rappresenta la sua **energia interna**, che è quindi somma di tutte le forme microscopiche di energia.



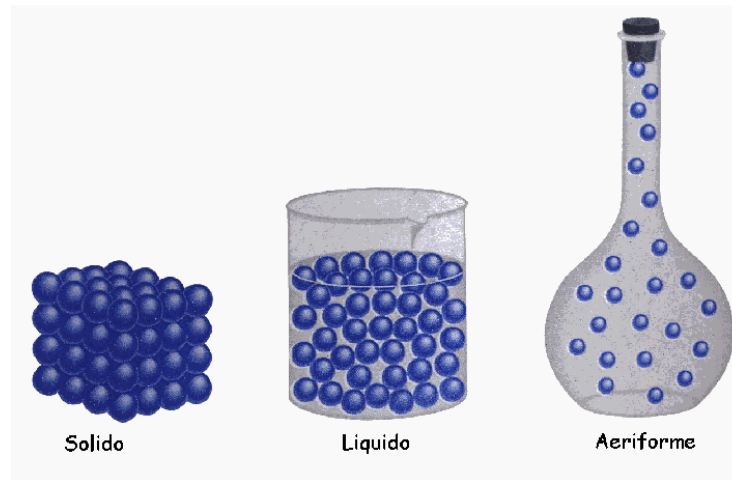
Temperatura ed energia

Al crescere della temperatura aumenta la velocità media delle particelle e quindi la loro energia cinetica e conseguentemente l'energia interna del sistema.



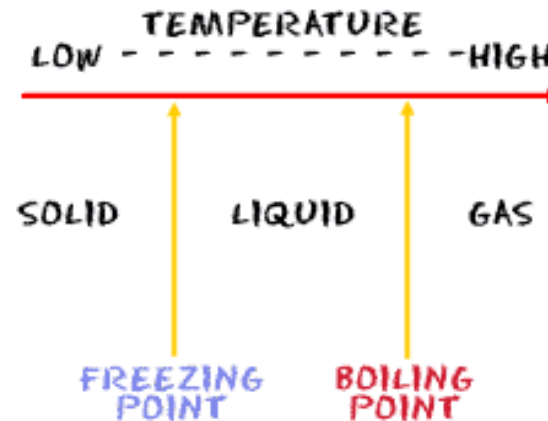
Energia termica

In seguito all'emanazione della teoria cinetica il calore fu interpretato come energia associata al moto delle particelle e quindi all'energia interna di un corpo.



Componenti dell'energia interna

In particolare viene chiamata **energia termica** la componente dell'*energia interna* di un sistema la cui variazione è proporzionale alla variazione di temperatura.

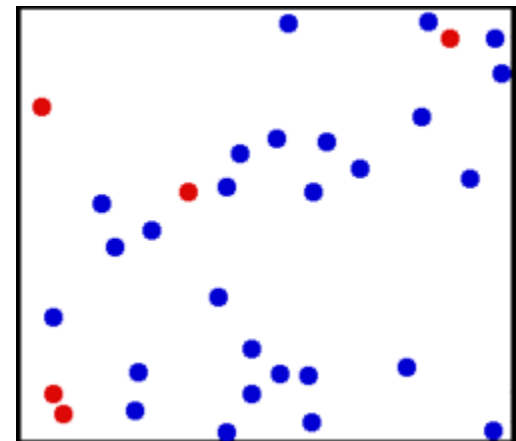


Un'altra componente dell' *energia interna* è infatti legata alle forze intermolecolari ed una terza componente è legata ai legami atomici

Conduzione

E' un processo mediante il quale l'energia termica si trasmette per contatto diretto tra le molecole senza che si spostino sensibilmente.

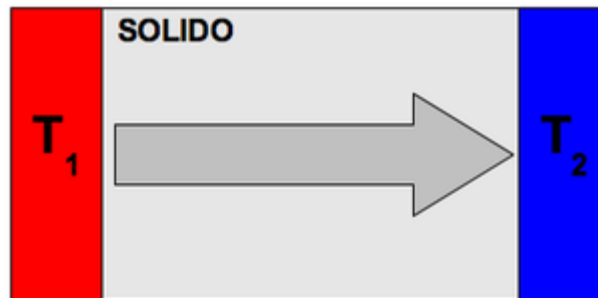
Si verifica per effetto dell'interazione delle particelle dotate di maggiore energia con quelle adiacenti dotate di minore energia.



Conduzione

Lo scambio di energia per conduzione può avvenire nei solidi, nei liquidi e nei gas, ma è il solo meccanismo secondo cui il calore può propagarsi nei solidi opachi.

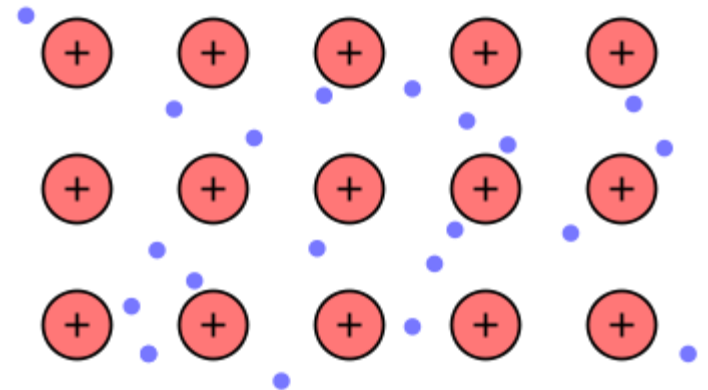
Essa è anche importante nei fluidi, ma nei mezzi non solidi è di solito associata alla convezione ed all'irraggiamento.



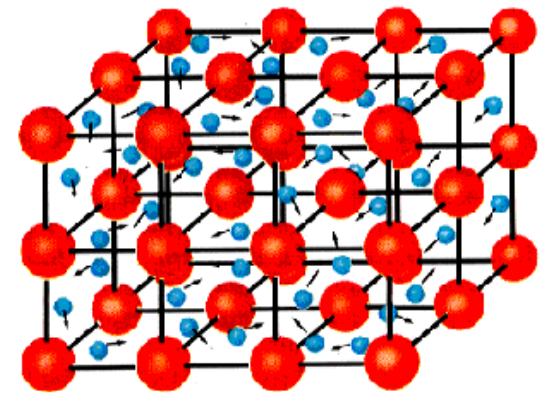
Meccanismi di scambio di energia

Lo scambio di energia può avvenire per urto elastico tra le molecole (**nei fluidi**) o per diffusione degli elettroni più veloci da regioni a temperatura maggiore verso regioni a temperatura minore (**nei metalli**);

nei solidi non metallici è invece dovuto alle vibrazioni delle molecole all'interno del reticolo.



Conduzione nei solidi

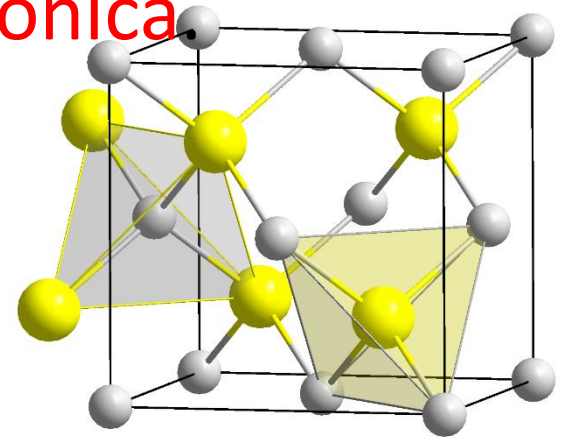


In generale, nei solidi, la trasmissione del calore è dovuta alla somma di due componenti:

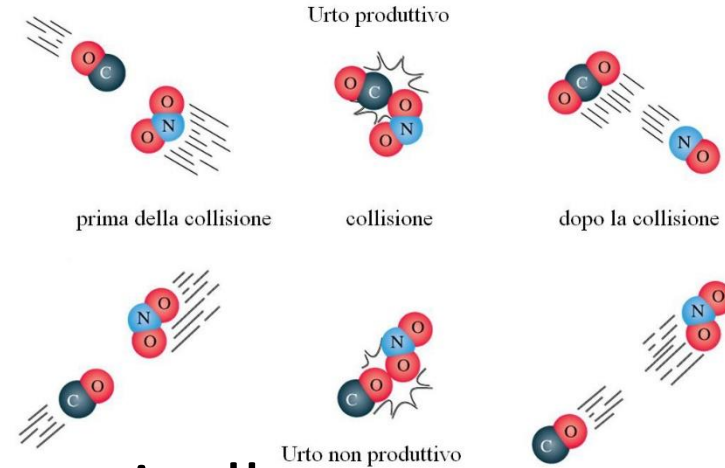
- a) gli effetti delle onde di vibrazione del reticolo prodotte dal movimento vibratorio delle molecole che occupano posizioni relativamente fisse (componente di reticolo)
- b) l'energia trasportata dal flusso libero di elettroni (componente elettronica).

Componenti di reticolo ed elettronica

La **componente di reticolo**, che prevale nelle sostanze non metalliche, dipende fortemente dalla disposizione delle molecole: per solidi cristallini estremamente ordinati (quali i diamanti) arriva ad esser molto più alta di quella dei metalli puri, nei quali invece il meccanismo prevalente è la **componente elettronica**.



Conduzione nei fluidi



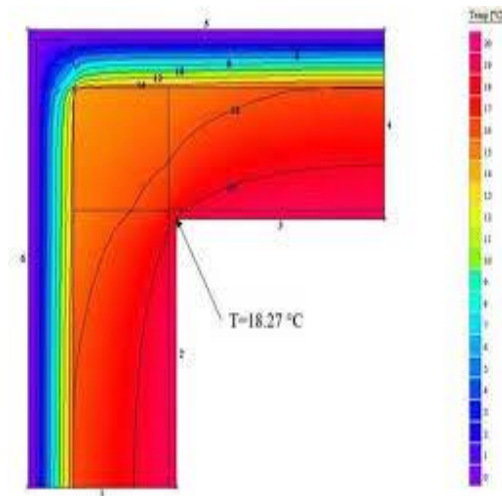
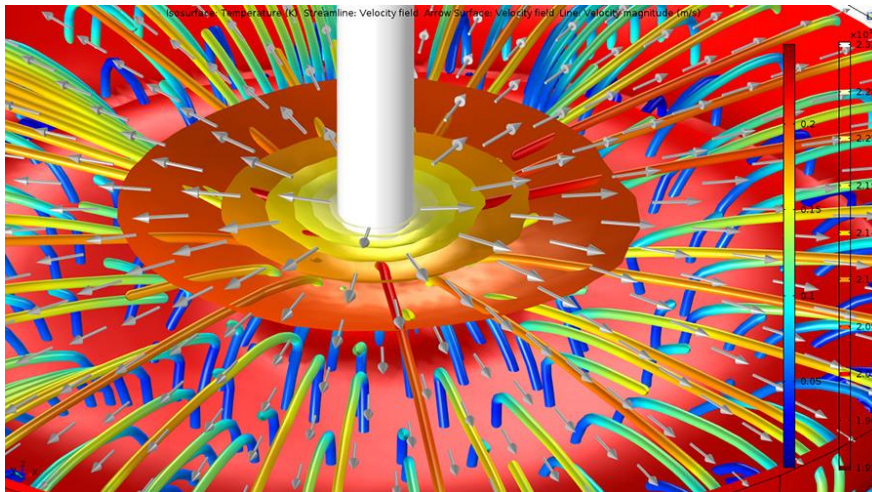
In un liquido o un gas, invece, le particelle muovendosi urtano tra di loro e con le pareti del contenitore: una parte dell'energia cinetica della molecola più energetica (a temperatura maggiore) si trasferisce allora alla molecola meno energetica (a temperatura minore).

Maggiore è la temperatura, più velocemente le molecole si muovono, più elevato è il numero di tali collisioni e migliore è la trasmissione del calore.

Distribuzione di temperatura

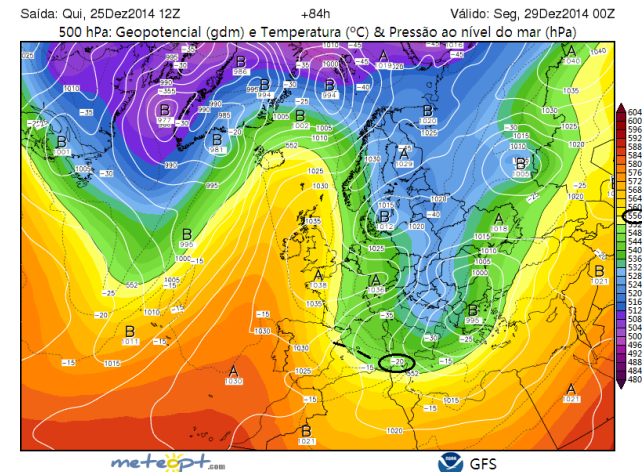
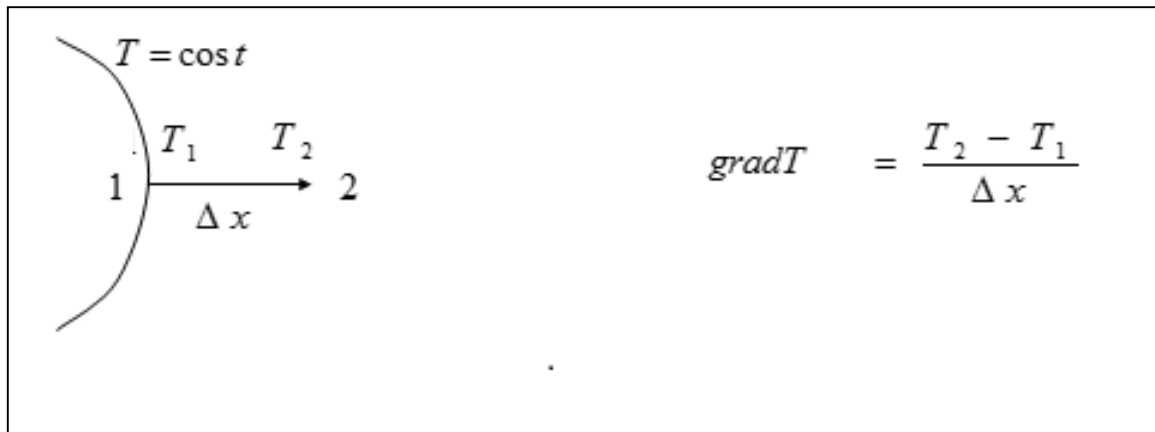
$T = f(x, y, z)$ definisce un campo scalare.

superfici isoterme: superfici caratterizzate da un unico valore di temperatura, non si intersecano tra loro e si estendono fino ai confini del sistema o si richiudono su se stesse restando tutte all'interno del sistema.



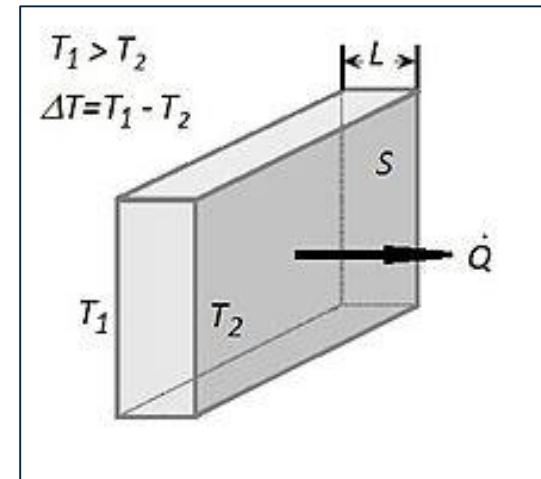
Gradiente di temperatura

gradiente di temperatura in un punto del campo: rapporto tra la variazione di temperatura corrispondente ad un segmento normale alla superficie isoterma passante per quel punto e la lunghezza del segmento stesso.

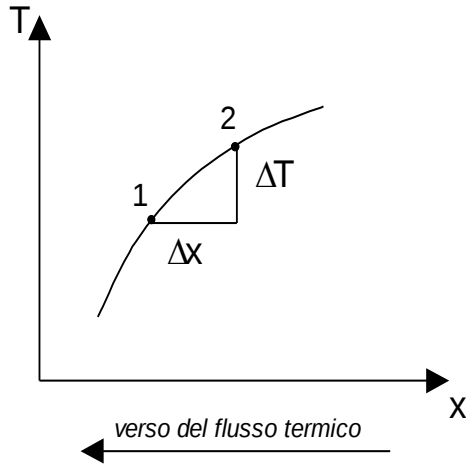


Gradiente di temperatura e flusso di calore

- Il gradiente di temperatura è orientato positivamente verso le temperature crescenti; con la sua definizione ad esso viene associato un campo vettoriale, le cui linee di forza sono perpendicolari alle superfici isoterme
- Poiché il calore fluisce spontaneamente da punti a temperatura maggiore verso punti a temperatura minore, il flusso di calore ha verso opposto al gradiente di temperatura

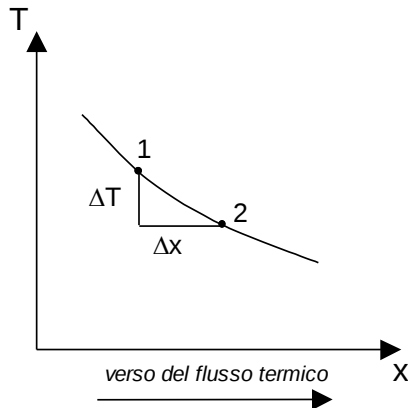


Verso del gradiente e del flusso



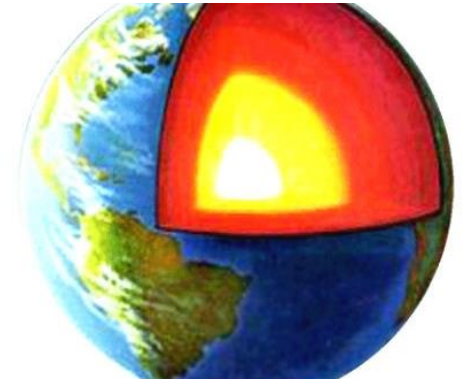
$$\frac{\Delta T}{\Delta x} > 0 \quad \text{gradiente di temperatura}$$

$$q < 0 \quad \text{flusso termico}$$



$$\frac{\Delta T}{\Delta x} < 0 \quad \text{gradiente di temperatura}$$

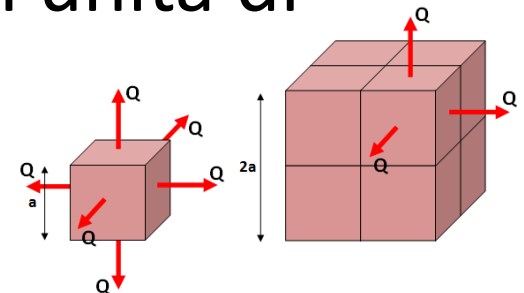
$$q > 0 \quad \text{flusso termico}$$



Densità di flusso di calore

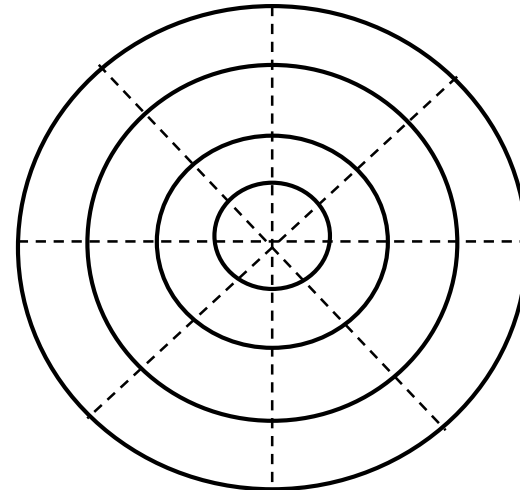
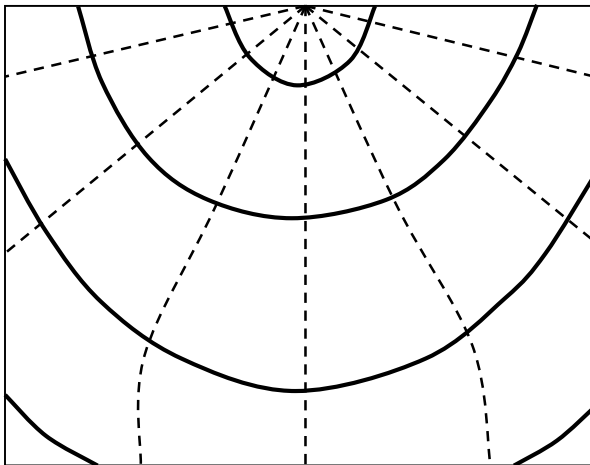
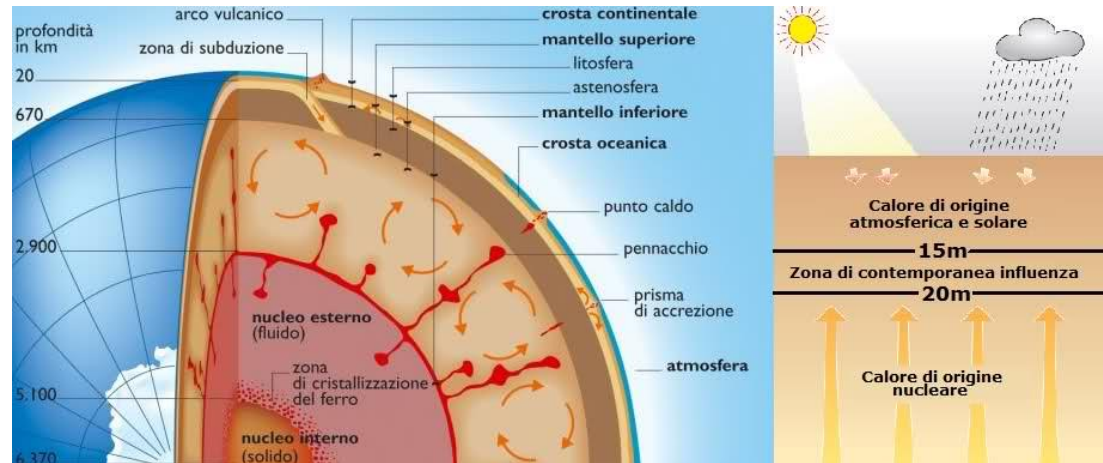
E' possibile definire un nuovo campo vettoriale, quello del *flusso di calore*, le cui linee di forza coincidono con quelle del campo del *gradiente di temperatura*, ossia i due vettori sono paralleli, ma hanno verso opposto.

densità di flusso di calore q : quantità di calore che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie isoterma



Esempi

———— Superfici isoterme
----- Linee di flusso termico

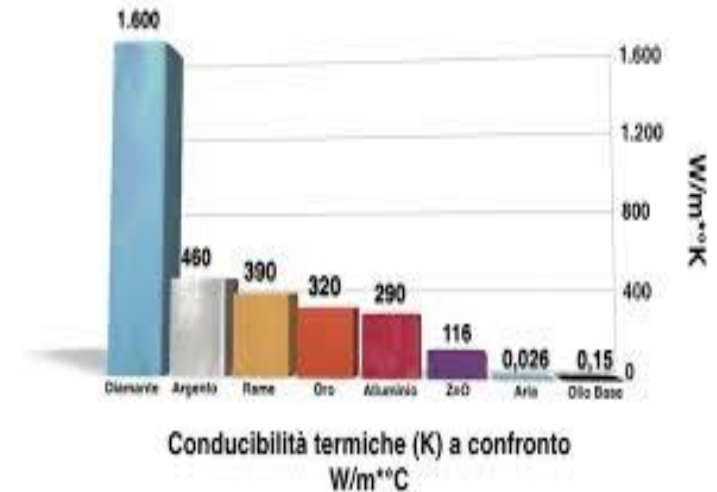


Legge di Fourier

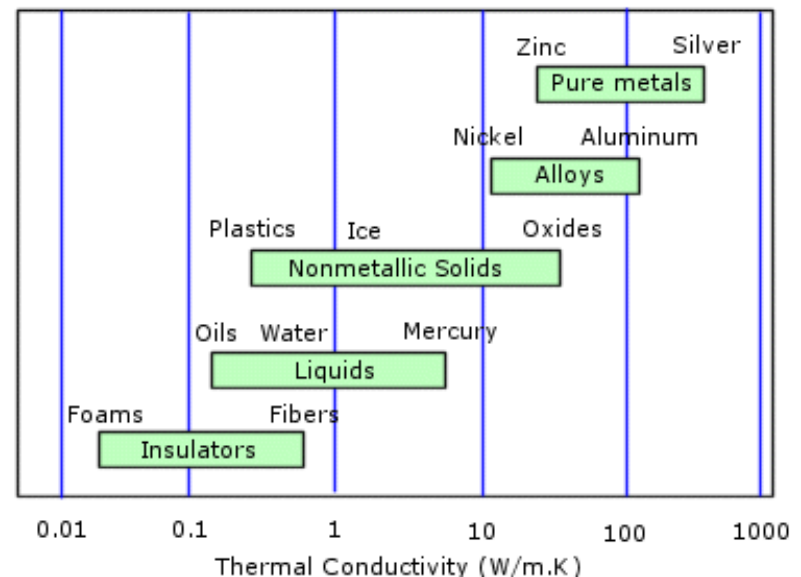
Range di valori di k

$$q = -k \text{ grad}T$$

k = conducibilità termica del materiale [W/mK]

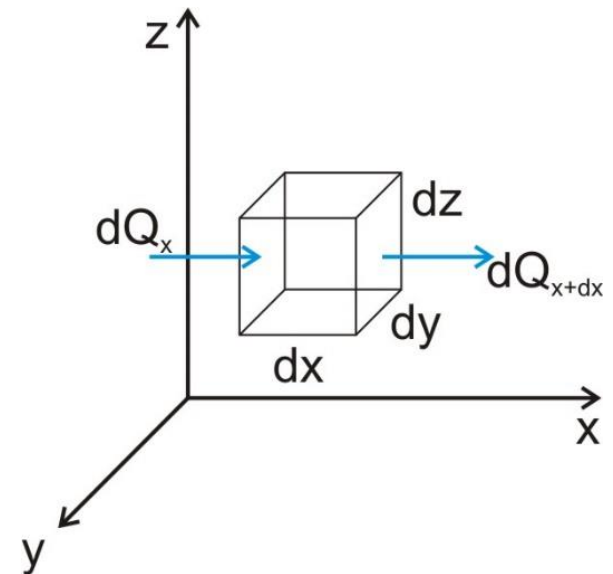


MATERIALE	CONDUTTIVITA' TERMICA
ARGENTO	420
RAME	392
ORO	295
ALLUMINIO	225
FERRO	60
GHISA	58
ACCIAIO INOX	16
PIETRA OLLARE	6,40
VETRO DA FUOCO	0,95
TERRACOTTA	0,80



Equazione di Fourier

si considera un elemento di volume $\Delta V = dx dy dz$ di un sistema omogeneo ed isotropo con conducibilità termica costante k ed in assenza di cambiamenti di fase, racchiuso da una superficie ΔS



Principio di conservazione dell'energia

$$dE_c + dE_p + dU = dQ - dL$$



$dL = 0$ non essendoci lavoro di deformazione

$dE_c = dE_p = 0$ considerando il sistema in quiete rispetto ad un riferimento inerziale



$$dQ + dQ_g = dU$$

dQ = quantità di calore entrante o uscente nel sistema

dQ_g = quantità di calore generata nel sistema

dU = variazione di energia interna del sistema

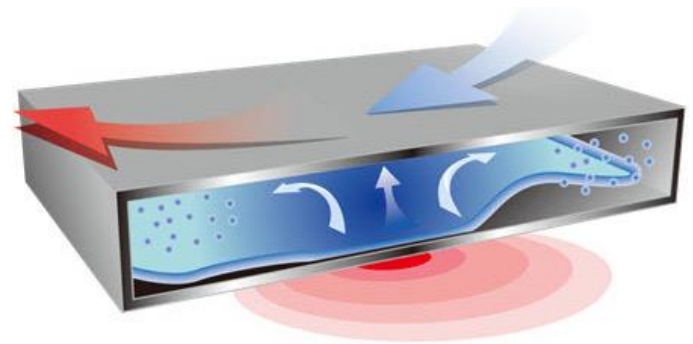
I termini dell'equazione

$$dQ = \left(- \int_{\Delta S} q \cdot n \cdot dS \right) d\tau$$

$$dQ = \left(- \int_{\Delta V} \text{div} q \cdot dV \right) d\tau = \left(- \int_{\Delta V} \text{div}(-k \text{grad} T) \cdot dV \right) d\tau = \left(\int_{\Delta V} k \nabla^2 T dV \right) d\tau$$

$$dQ_g = \left(\int_{\Delta V} q_g dV \right) d\tau$$

$$du = mc dT \Rightarrow \Delta U = \left(\int_{\Delta V} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV \right) d\tau$$



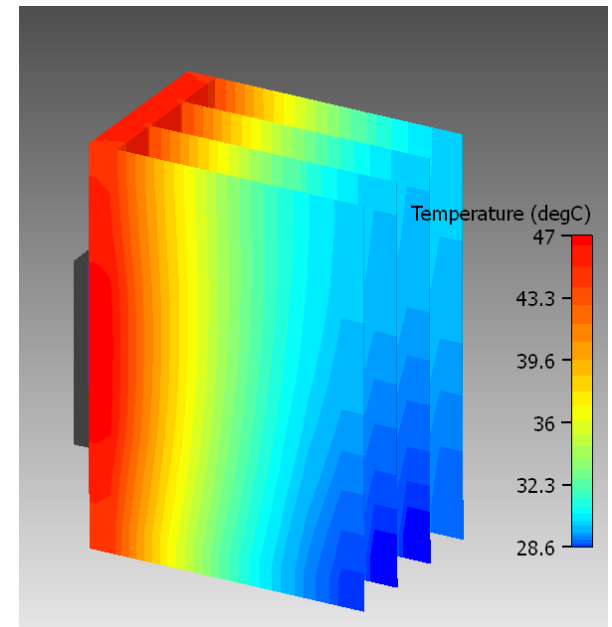
Equazione generale della conduzione

$$\int_{\Delta V} \left(k \nabla^2 T + q_g - \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) dV = 0$$

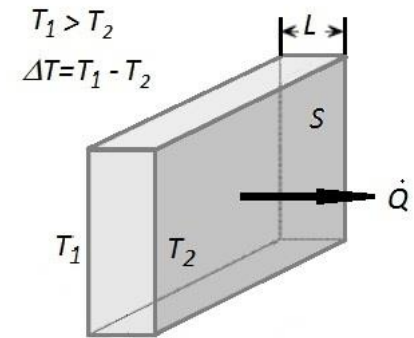
$$\alpha \nabla^2 T + \frac{q_g}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Diffusività termica

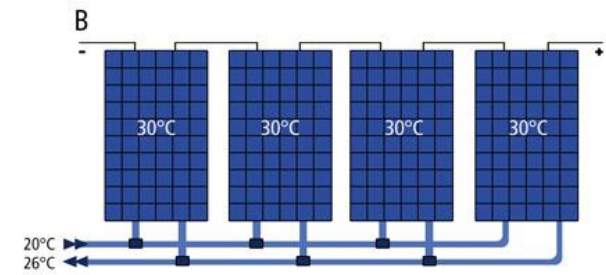


Condizioni al contorno



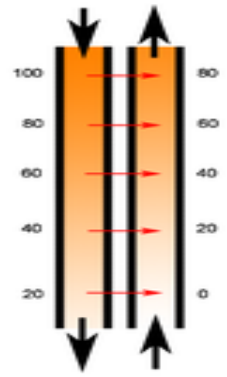
- valore assegnato della temperatura sulla superficie di contorno, in funzione della posizione e del tempo;
- valore assegnato del flusso di calore che attraversa la superficie di contorno, in funzione della posizione e del tempo;
- valore assegnato del flusso di calore che attraversa la superficie di contorno, dipendente dalla differenza tra i valori assunti dalla temperatura sulla superficie stessa e ad una distanza tale da non risentire praticamente del fenomeno di scambio termico in atto (scambio convettivo e/o radiativo).

Regime stazionario e non stazionario



- **regime stazionario:** in qualsiasi punto del sistema la potenza termica entrante è uguale alla potenza termica uscente e non si ha alcuna variazione di energia interna. La temperatura in ogni punto non varia nel tempo
- **regime non stazionario (distinto tra *transitorio* o *variabile*):** la potenza è variabile e la temperatura in ciascun punto varia nel tempo. Poiché una variazione di temperatura sta ad indicare una variazione di energia interna, l'accumulo di energia è peculiare del flusso non a regime

Casi particolari



- Regime stazionario con generazione di calore

$$\nabla^2 T + \frac{q_g}{k} = 0 \quad \text{EQUAZIONE di POISSON}$$

- Regime stazionario senza generazione di calore

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{EQUAZIONE DI LAPLACE}$$

- Regime variabile senza generazione di calore

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Conduzione monodimensionale stazionaria senza generazione di calore

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

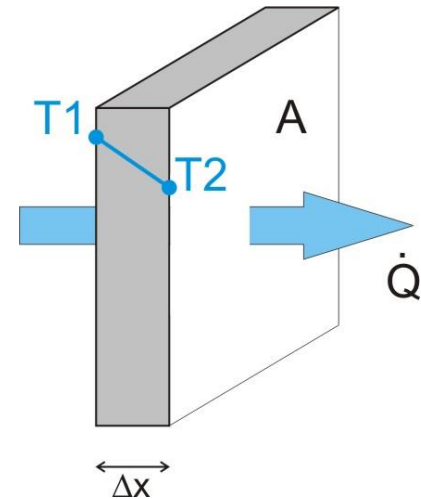
con le condizioni al contorno:

per $x = 0$

$$T = T_1$$

per $x = \Delta x$

$$T = T_2$$



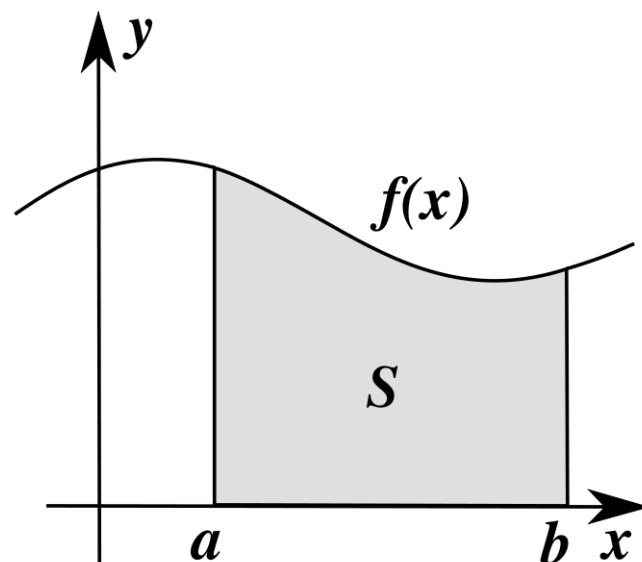
Integrazione

Una prima integrazione fornisce:

$$\frac{d}{dx} \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{costante} = A$$

ed una seconda:

$$dT = A dx \quad \Rightarrow \quad T = Ax + B$$



Determinazione delle costanti

Imponendo le condizioni al contorno si ricavano le costanti:

$$\text{per } x = 0 \quad T = T_1 \quad \Rightarrow T_1 = B$$

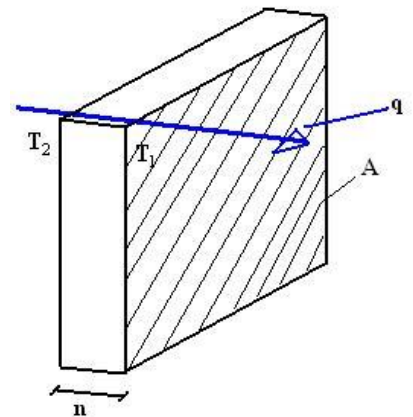
$$\text{per } x = \Delta x \quad T = T_2 \quad \Rightarrow T_2 = A\Delta x + B = A\Delta x + T_1$$

$$\Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$

da cui:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} x + T_1$$

$$q = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x}{k}}$$

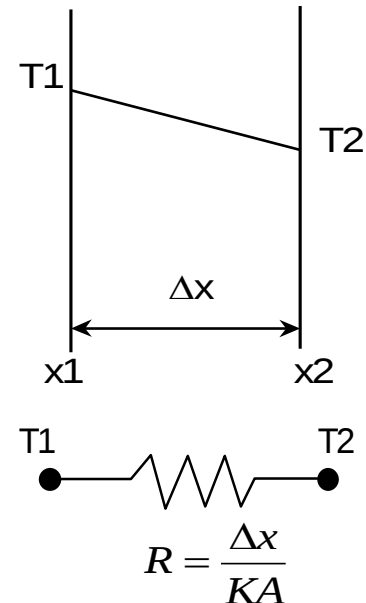


Conduzione monodimensionale stazionaria senza sorgenti di calore

Strato di materiale omogeneo ed isotropo, delimitato da due superfici piane e parallele di estensione infinita, a temperatura costante ed uniforme

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow$$

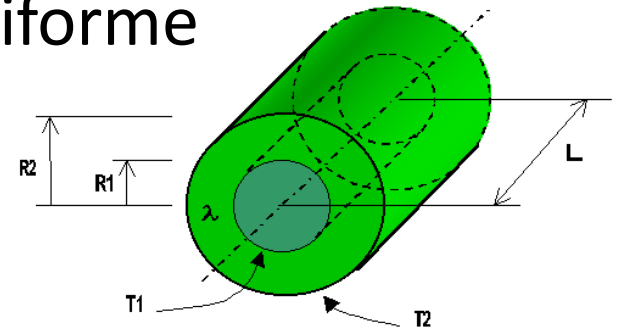
$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x / kA} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$



Conduzione monodimensionale stazionaria senza sorgenti di calore

Cilindro cavo di materiale omogeneo e isotropo delimitato da due superfici cilindriche di estensione infinita, a temperatura costante ed uniforme

$$q = -kA \frac{dT}{dr} \Rightarrow q = -k2\pi rL \frac{dT}{dr}$$



$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

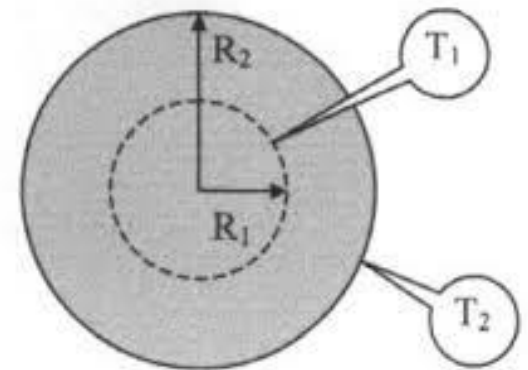
$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$$

Conduzione monodimensionale stazionaria senza sorgenti di calore

Guscio sferico di materiale omogeneo ed isotropo
delimitato da due superfici sferiche a temperatura
costante ed uniforme

$$q = -kA \frac{dT}{dr} = -k4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

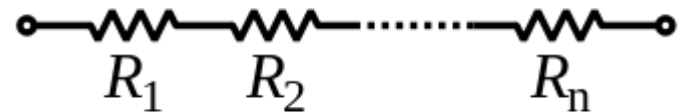
$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\frac{4\pi k}{r_1}} - \frac{1}{\frac{4\pi k}{r_2}}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1}$$



$$R = \frac{1}{\frac{4\pi k}{r_1}} - \frac{1}{\frac{4\pi k}{r_2}}$$

Analogia elettrica

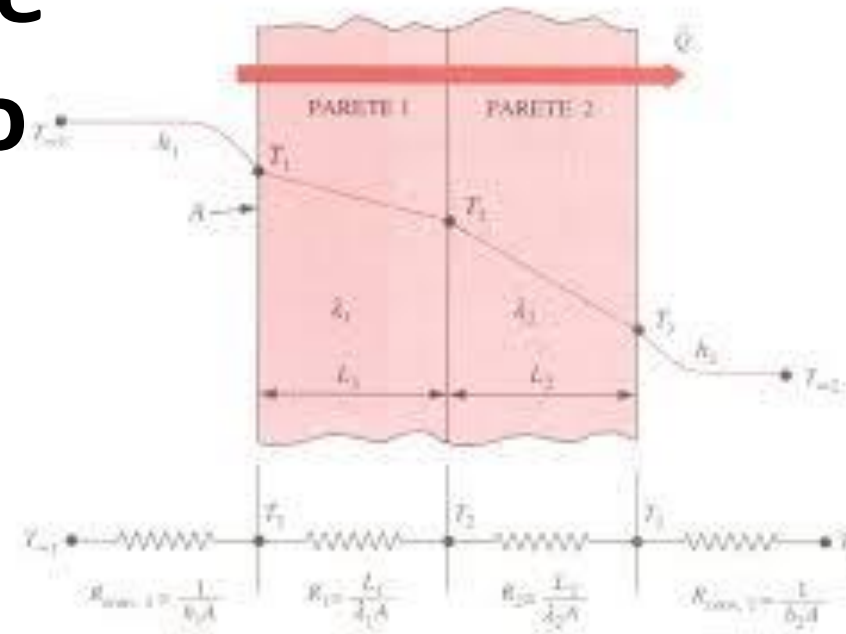
L'analogia che collega lo studio dei fenomeni termici ed elettrici trae origine dalla similitudine esistente tra le equazioni che li governano. Si ha infatti che formalmente alla legge di Fourier corrisponde la legge di Ohm e all'equazione di Fourier l'equazione del potenziale elettrico.



Ciò consente di utilizzare alcuni risultati analitici propri della teoria dell'elettricità per lo studio della trasmissione del calore (un tipico esempio si ha nel concetto di resistenza)

L'esistenza di una tale analogia consente quindi di realizzare modelli elettrici per mezzo dei quali è possibile prevedere il comportamento termico di strutture complesse, che difficilmente potrebbero essere studiate analiticamente.

Coefficiente globale di scambio termico



$$q = \frac{T_i - T_e}{\sum_i R_i}$$

$$\sum_i R_i = \frac{1}{h_i A} + \frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_e A}$$

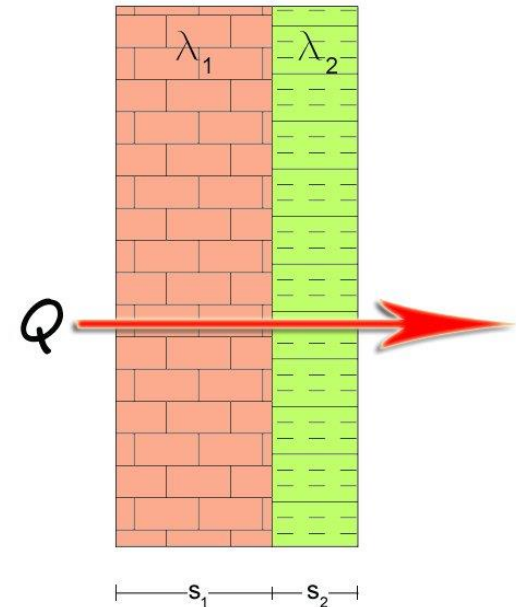
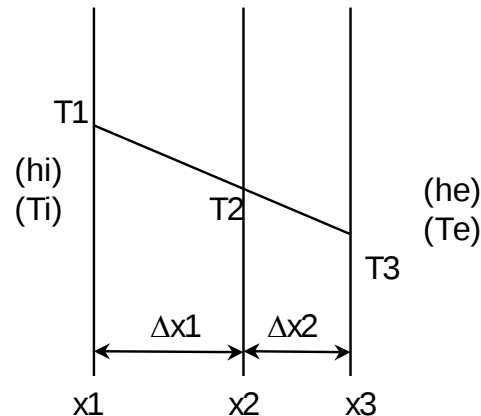
$$q = UA \Delta T_{tot}$$

dove $UA = \frac{1}{\sum R_i}$

Sistemi composti piani

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1 / k_1 A} = \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2 / k_2 A}$$

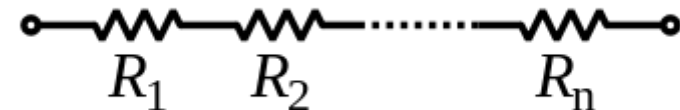
$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A}} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$



Condizioni al contorno di tipo convettivo:

$$q = \frac{T_i - T_1}{1/h_i A} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1 / k_1 A} = \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2 / k_2 A} = \frac{T_3 - T_e}{1/h_e A}$$

$$q = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i A} + \frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_e A}} = \frac{T_i - T_e}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$



Sistemi composti cilindrici

Superficie interna:

$$q = \frac{T_i - T_1}{1/2\pi r_1 L h_i} = \frac{T_i - T_1}{R_1}$$

Cilindro interno:

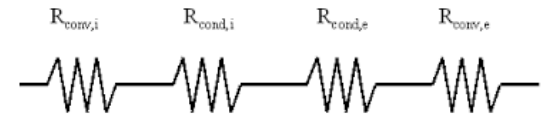
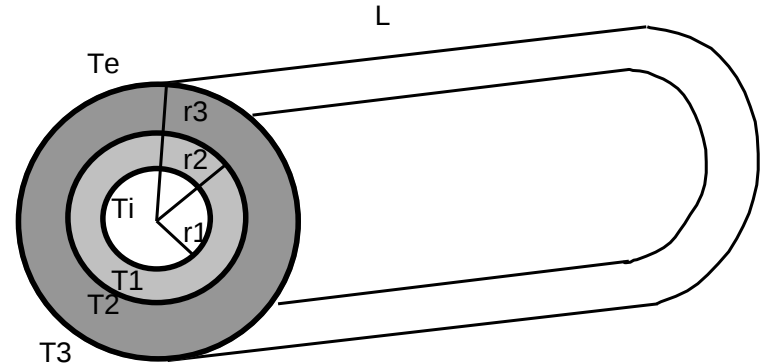
$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}} = \frac{T_1 - T_2}{R_2}$$

Cilindro esterno:

$$q = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L}} = \frac{T_2 - T_3}{R_3}$$

Superficie esterna:

$$q = \frac{T_3 - T_e}{1/2\pi r_3 L h_e} = \frac{T_3 - T_e}{R_4}$$



$$q = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_e}}$$

Coefficiente globale di scambio termico



$$q = UA\Delta T_{tot} \quad \text{dove} \quad UA = \frac{1}{\sum R_i}$$

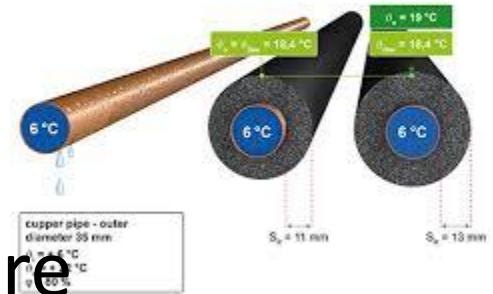
Nel caso di geometria cilindrica le superfici A_i sono diverse. Il coefficiente U può riferirsi a qualsiasi area, ma essendo il diametro esterno più facile da misurare, di solito si usa l'area esterna

$$U = \frac{1}{\frac{2\pi r_3 L}{2\pi r_1 L h_i} + \frac{2\pi r_3 L \ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} + \frac{2\pi r_3 L \ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{2\pi r_3 L}{2\pi r_3 L h_e}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e}}$$

Spessore critico dell'isolante

Dalle espressioni del flusso risulta come un aumento di r_3 , lo spessore dell'isolante, faccia aumentare logaritmicamente la resistenza termica di conduzione, ma riduca linearmente la resistenza di convezione.



Per determinare la relazione fra calore trasmesso e spessore dell'isolante va studiata quantitativamente l'espressione analitica.

Spessore critico dell'isolante

Essendo in molte situazioni pratiche la resistenza termica concentrata nell'isolante e sulla superficie esterna, si porrà che T_i sia la temperatura della superficie interna dell'isolante (ciò equivale a considerare lo strato più interno sottile e di k elevata, così da poter trascurare il salto termico su di esso).

$$q = \frac{T_i - T_e}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_e}} = \frac{2\pi L(T_i - T_e)}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{r_3 h_e}} \quad f(r_3) = \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{r_3 h_e}$$

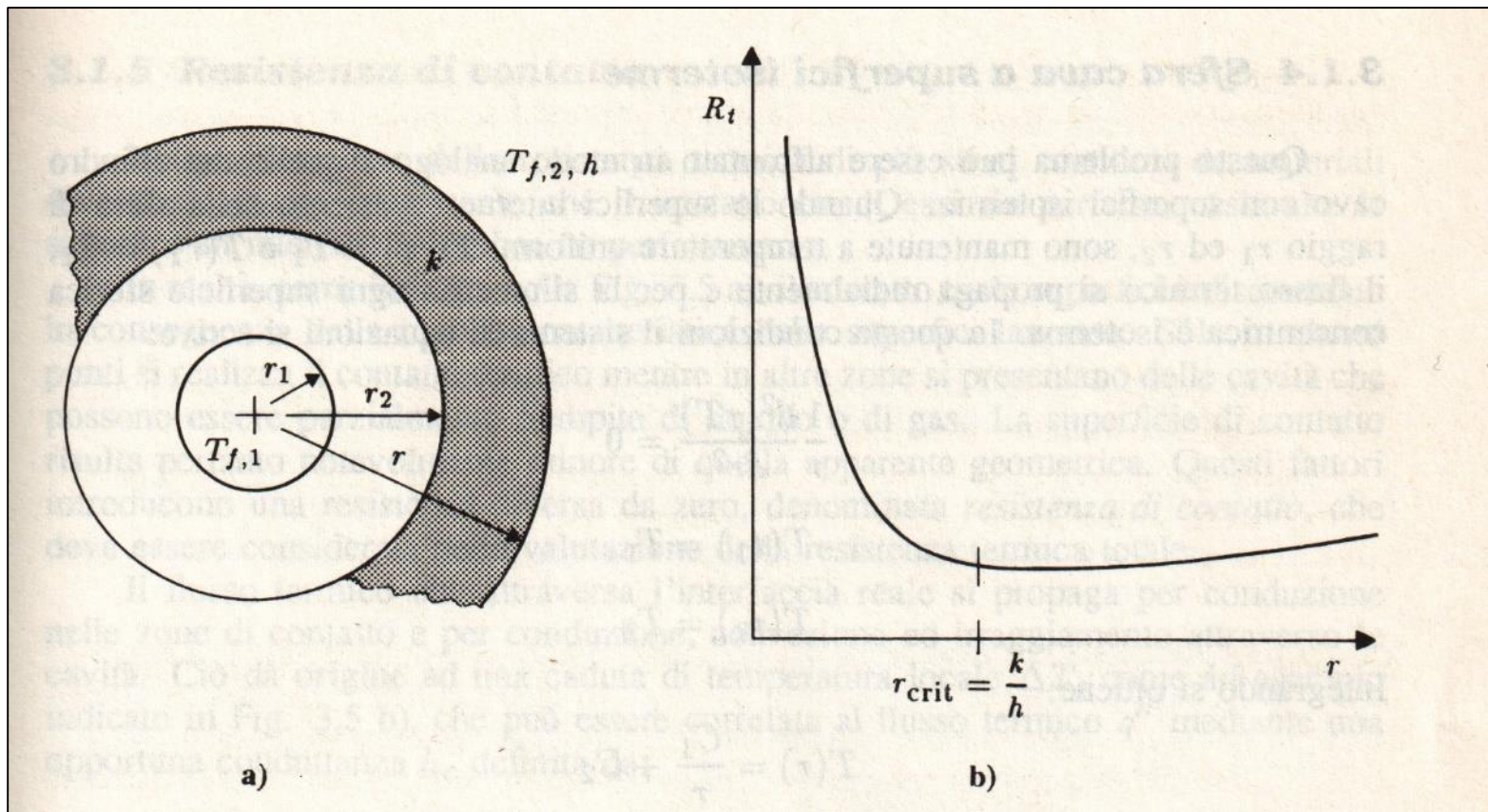
Si trova: $r_{3cr} = \frac{k_2}{h_e}$ è un minimo per la funzione $f(r_3)$

per cui è un massimo per q .

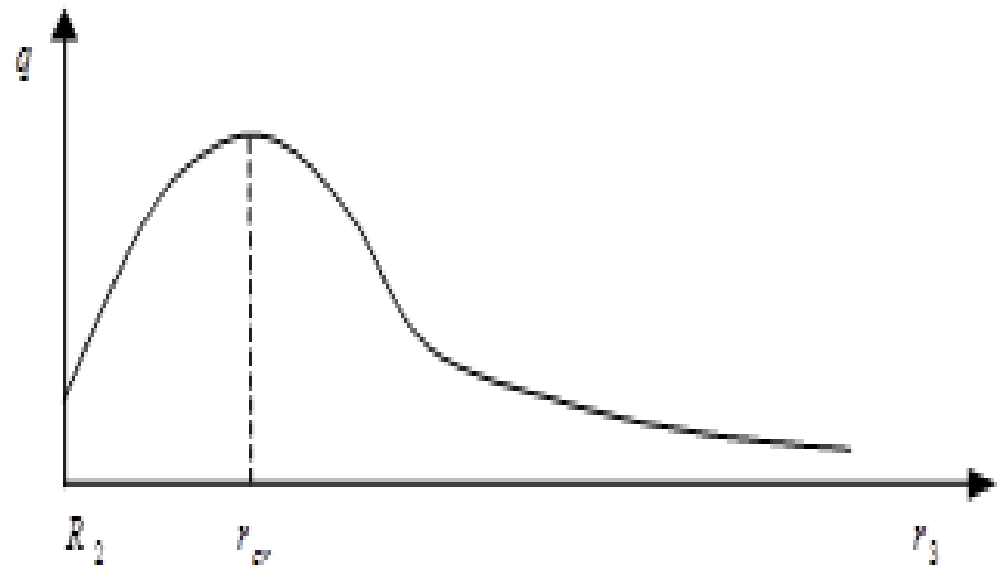
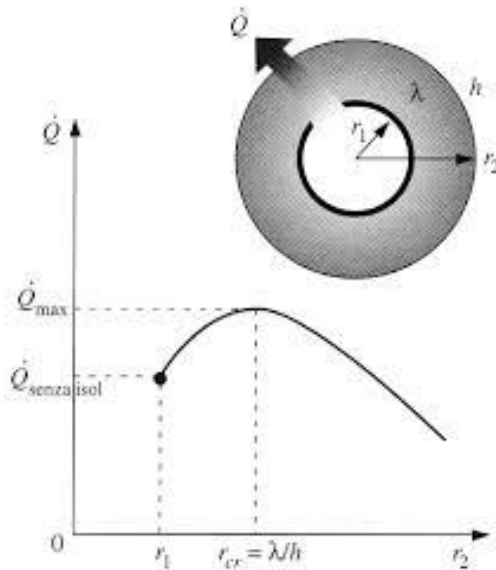


Andamento della resistenza termica

Se $r < r_{3cr}$ la resistenza termica R diminuisce con l'aggiunta di isolante
se $r > r_{3cr}$ la resistenza termica R cresce con l'aggiunta di isolante



Spessore critico dell'isolante



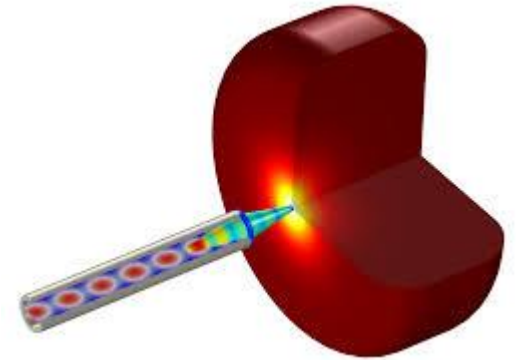
Se $r < r_{3cr}$ le perdite di calore aumentano con l'aggiunta di materiale isolante

se $r < r_{3cr}$ decrescono per aggiunta di materiale isolante.

Nei casi pratici tuttavia k_2 è molto piccolo ed r_{cr} è più piccolo dello spessore del tubo nudo, per cui è sempre utile isolare.

Conducibilità termica variabile

$$k = k_0 (1 + bT)$$

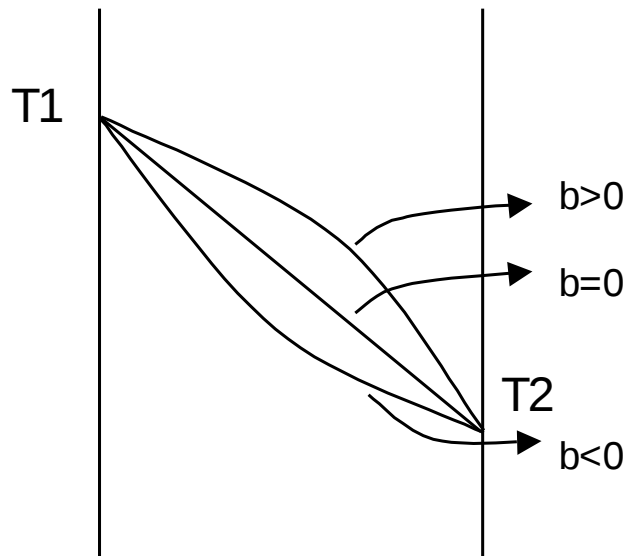


L'andamento della temperatura dipende dal segno di b :

$b > 0$: k cresce con la temperatura, il materiale è buon conduttore ad alta temperatura e cattivo conduttore a bassa temperatura.

$b < 0$: k decresce con la temperatura ed il materiale è un cattivo conduttore ad alta temperatura e buon conduttore a bassa temperatura.

k variabile con la temperatura

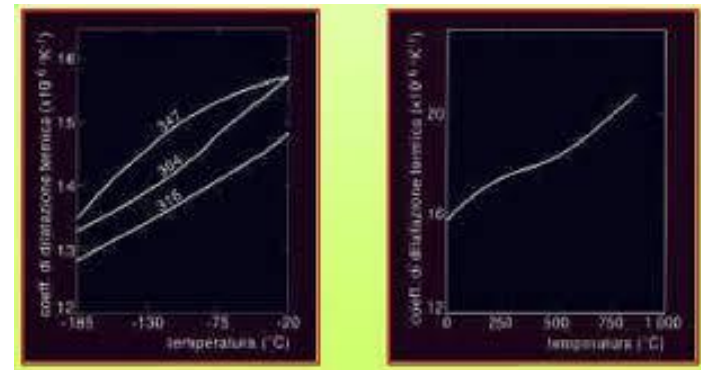


$$\frac{dk}{dT} = k_0 b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} >0 \text{ se } b > 0 \\ <0 \text{ se } b < 0 \\ =0 \text{ se } b = 0 \end{array} \right.$$

se $b > 0$ la concavità è rivolta verso il basso,
se $b < 0$ la concavità è rivolta verso l'alto,
se $b = 0$ l'andamento è lineare.

$k(t)$ – Strato piano



$$q = -k_0(1 + bT)A \frac{dT}{dx} = -k_0(T_2 - T_1) \cdot \left[1 + b \left(\frac{T_2 + T_1}{2} \right) \right]$$

Calcolando il valor medio di k sulle due superfici esterne

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} = k_0 \left[1 + b \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \right]$$

si ha:

$$\frac{q}{A} = k_m \frac{T_1 - T_2}{\Delta x}$$

$k(t)$ – cilindro cavo e guscio sferico

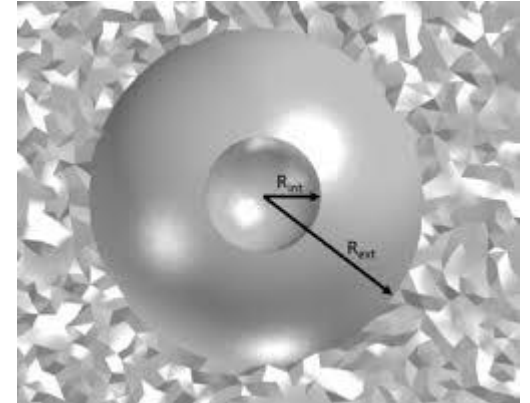
Analogamente si ricava:

- Cilindro cavo

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_m L}}$$

- Guscio sferico

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi k_m}}$$

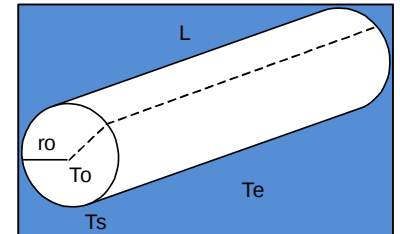


Conduzione monodimensionale stazionaria con generazione di calore

Esempi caratteristici sono le bobine e le resistenze elettriche, i reattori nucleari e le caldaie.

Il caso più semplice si ha quando la generazione di calore è costante nel tempo e nello spazio, come nei conduttori percorsi da corrente elettrica, sede di generazione di calore per effetto *Joule*:

$$q_g = \frac{I^2 R}{V} = \frac{V \cdot I}{\pi r_0^2 L}$$

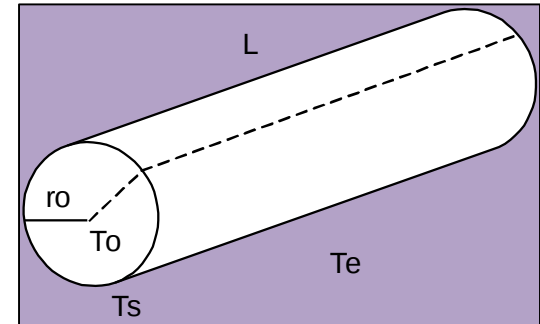


dove L è la lunghezza ed r_0 il raggio del conduttore, a sezione cilindrica, I la corrente che lo attraversa e V la tensione

Caso di conduttori cilindrici

L'equazione di *Poisson*:

$$\nabla^2 T + \frac{q_g}{k} = 0$$



utilizzando le coordinate cilindriche e supponendo che la distribuzione di temperatura dipenda solo dalla distanza radiale: $T = T(r)$, si ha

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} + \frac{q_g}{k} = 0$$

Andamento della temperatura

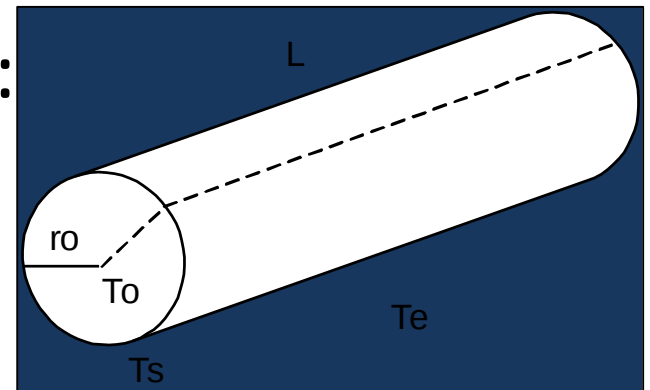
Utilizzando due condizioni al contorno del tipo:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{e} \quad T = T_s \quad \text{per } r = r_0$$

Con T_s temperatura della superficie esterna.

L'andamento della temperatura:

$$T = T_s + \frac{q_g r_0^2}{4k} (r_0^2 - r^2)$$

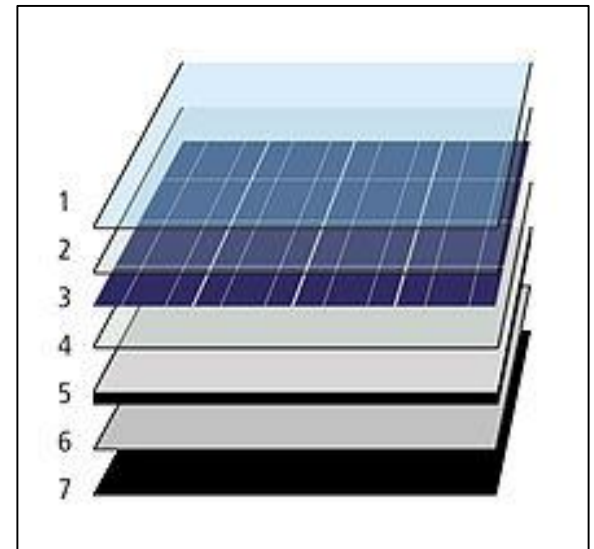


con il massimo sull'asse, per $r = r_0$

Conduzione bidimensionale stazionaria senza generazione di calore

Per una piastra rettangolare sottile senza sorgenti di calore e con le superfici superiore ed inferiore isolate l'equazione di Laplace diviene:

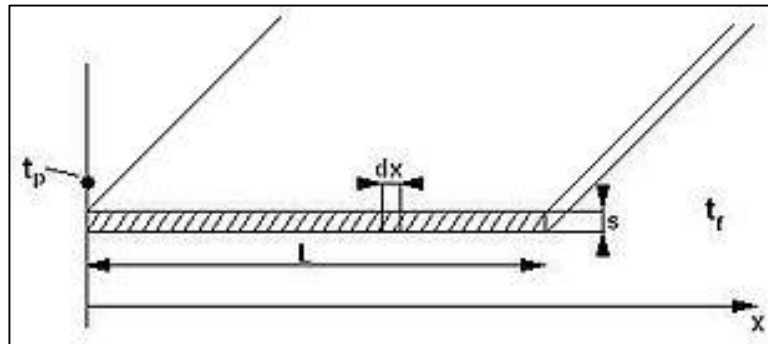
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



Conduzione monodimensionale in regime variabile senza generazione di calore

Per uno strato piano costituito da un materiale omogeneo ed isotropo, che non è sede di generazione di calore, l'equazione di Fourier diviene:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

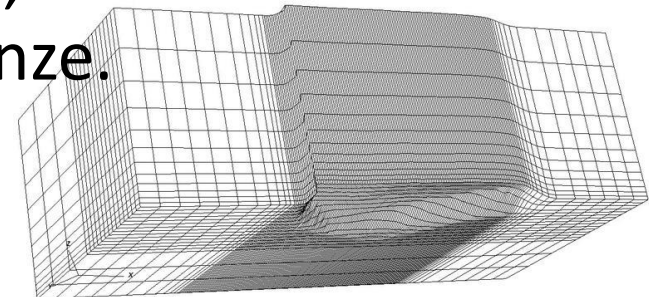


Metodi numerici

Quando la geometria del sistema e le condizioni al contorno sono tanto complicate da non consentire né la soluzione analitica, né l'analogica si può ricorrere alle soluzioni numeriche

Si suddivide il sistema in un numero piccolo di sottovolumi uguali, supponendo che ciascuno di essi si trovi alla temperatura del suo punto centrale (*punto nodale*)

Il trasporto di calore avviene solo tra punti nodali e l'energia si immagazzina solo in essi, come se fossero collegati da fittizi conduttori – resistenze.



Bilancio termico in un punto nodale

In condizioni di regime stazionario, la potenza termica che fluisce verso ciascun punto nodale deve essere uguale alla potenza termica che fluisce dal punto nodale (*Kirchhoff*).

Per soddisfare questa condizione si effettua un bilancio termico in ogni punto nodale, ottenendo tante equazioni algebriche quanti sono i punti nodali, che consentono di determinarne le temperature.



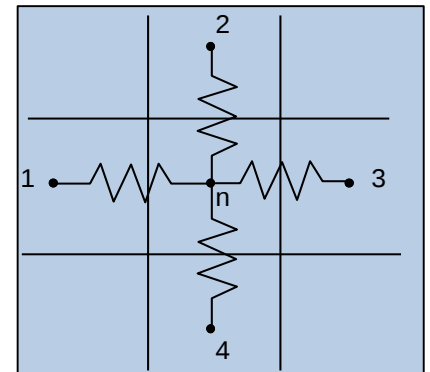
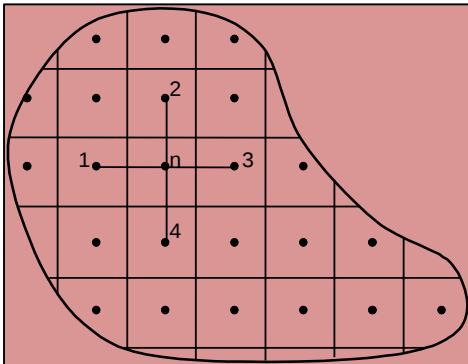
Equazione della temperatura al nodo

Il bilancio termico nel nodo n si scrive:

$$q_{1 \rightarrow n} + q_{2 \rightarrow n} + q_{3 \rightarrow n} + q_{4 \rightarrow n} = 0$$

$$\frac{k \cdot A \cdot \Delta T_1}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_2}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_3}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_4}{L} = 0$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_n = 0$$

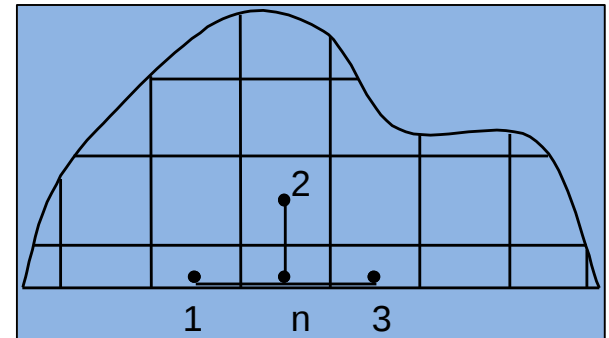


Bilancio in un punto nodale esterno

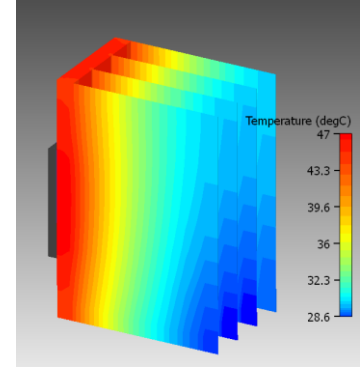
Se un punto nodale è esterno solo metà della superficie associata alla conduzione fra punti interni è coinvolta

$$\frac{k \cdot A \cdot \Delta T_1}{2L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_2}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_3}{2L} + h \cdot A \cdot \Delta T_a = 0$$

$$\frac{(T_1 - T_n)}{2} + (T_2 - T_n) + \frac{(T_3 - T_n)}{2} + \frac{hL}{k} (T_A - T_n) = 0$$



Conduzione in regime non stazionario



Si hanno condizioni **stazionarie** se la potenza termica in un sistema non varia nel tempo: in qualsiasi punto la potenza termica entrante è uguale alla potenza termica uscente. La temperatura in ciascun punto non cambia e non si ha variazione di energia interna

Quando la potenza varia la trasmissione ha invece luogo in condizioni di regime **non stazionario**. La temperatura in ciascun punto varia nel tempo e c'è variazione di energia interna.

Conduzione in transitorio in sistemi con resistenza interna trascurabile

Sistemi in cui la resistenza conduttiva interna R_i del sistema è così piccola che la sua temperatura si può assumere uniforme in ogni istante.

E' possibile adottare questa semplificazione quando la resistenza termica esterna R_e tra la superficie del sistema ed il mezzo circostante è tanto grande in confronto a quella interna da controllare il processo di scambio termico. Una misura della relazione fra le due resistenze è data dal loro rapporto:

$$\frac{R_i}{R_e}$$



Numero di *Biot*

$$\frac{R_i}{R_e} = \frac{L / kA}{1 / hA} = \frac{hL}{K}$$

adimensionale, con:

h coefficiente di convezione del fluido circostante

k coefficiente di conducibilità termica del corpo

L una sua lunghezza significativa, che si ottiene dividendo il volume *V* del corpo per l'area *A* della sua superficie

Il rapporto prende il nome di **Numero di Biot, *Bi***.

Se ***Bi* < 0,1**, ossia $R_i < 10\% R_e$ l'errore introdotto è < 5%.



Raffreddamento di un piccolo corpo a temperatura uniforme

Un esempio di sistemi con $Bi < 0,1$ è dato dal raffreddamento di un piccolo corpo, estratto da un forno a temperatura uniforme, che venga immerso in un fluido a temperatura costante T_e così rapidamente da potere approssimare la variazione della temperatura ambiente con una variazione a gradino.

Bilancio di energia in un intervallo di tempo dt :

$$dU = q$$

$$c\rho VdT = -hA(T - T_e)dt$$

c, ρ = calore specifico, densità del corpo

il segno $-$ indica che l'energia **qdt** è ceduta dal corpo



Andamento della temperatura

Essendo T_e costante, il bilancio può anche scriversi come:

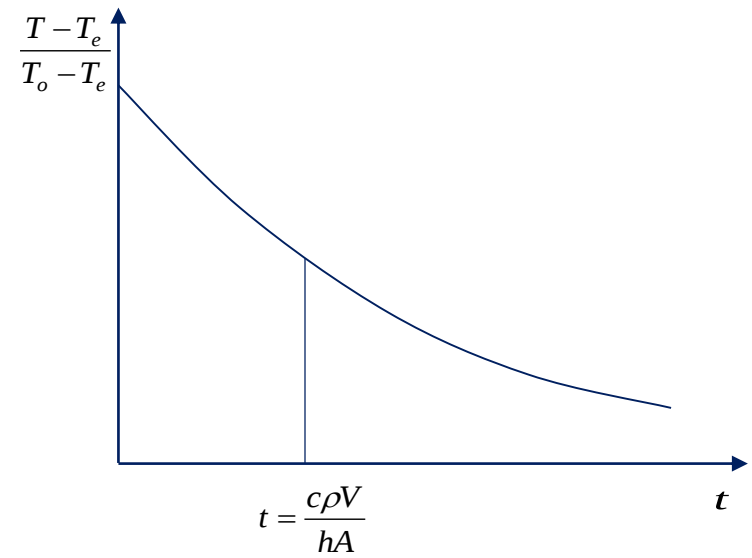
$$\frac{d(T - T_e)}{T - T_e} = -\frac{hA}{c\rho V} dt$$

Integrando fra il tempo $t = 0$ ed il tempo t , con condizioni al contorno:

$$T = T_0 \quad \text{per } t = 0, \quad T = T \quad \text{per } t = t$$

$$\ln \left[\frac{(T - T_e)}{T_0 - T_e} \right] = -\frac{hA}{c\rho V} t$$

$$\frac{(T - T_e)}{T_0 - T_e} = e^{\left(-\frac{hA}{c\rho V} t \right)}$$



Costante di tempo del sistema

La quantità $\frac{c\rho V}{hA}$



avendo le dimensioni di un tempo, prende il nome di *costante di tempo del sistema*. Essa indica la velocità di risposta di un sistema ad una sola capacità ad una improvvisa variazione della temperatura ambiente.

Per $t = \frac{c\rho V}{hA}$

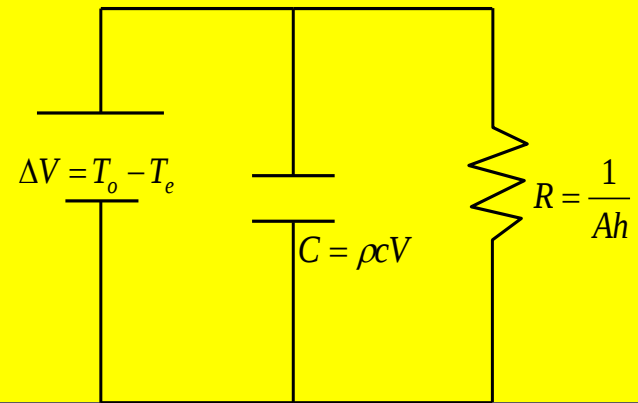
la differenza di temperatura è pari al 36,8% della differenza iniziale

Rete elettrica equivalente

Nella rete elettrica equivalente alla rete termica il sistema è costituito da una sola capacità, che, caricata al potenziale T_o , si scarica attraverso la resistenza $1/hA$.

I risultati si possono esprimere mediante parametri adimensionali. Essendo $L = V/A$ l'esponente diviene:

$$-\frac{hA}{c\rho V}t = -\frac{ht}{\rho cL}$$



Numero di Fourier

Moltiplicando e dividendo per kL si ha:

$$\frac{ht}{\rho cL} \cdot \frac{kL}{kL} = \left(\frac{hL}{k} \right) \left(\frac{kt}{\rho cL^2} \right) = Bi \cdot \frac{\alpha t}{L^2}$$

Ponendo:

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Fo = Numero di Fourier

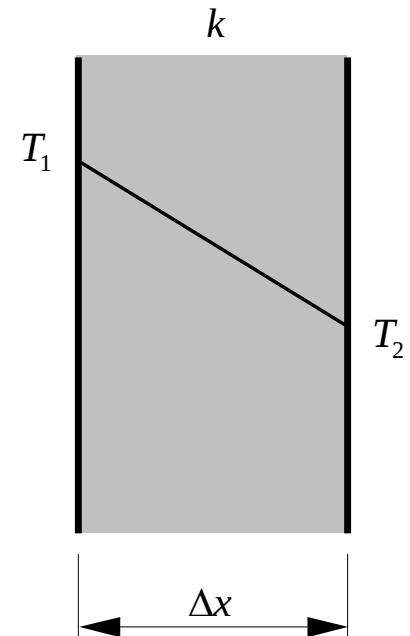


$$\frac{ht}{\rho cL} = Bi \cdot Fo \quad \text{e} \quad \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

Esercizio 1

Determinare il flusso termico per unità di area che attraversa in regime permanente una lastra piana ($k = 0.19 \text{ W/mK}$) spessa 38 mm con le due facce mantenute alle temperature $T_1 = 311 \text{ K}$ e $T_2 = 294 \text{ K}$.

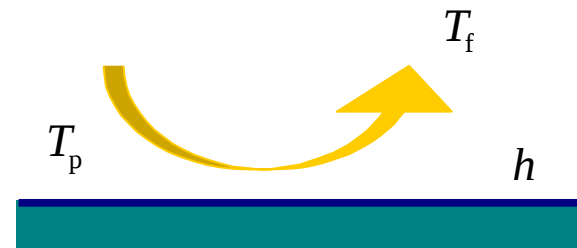
$$\frac{q}{A} = \frac{k(T_1 - T_2)}{\Delta x} = \frac{0.19 \frac{\text{W}}{\text{mK}} (311 - 294) \text{ K}}{0.038 \text{ m}} = 85 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Esercizio 2

Il coefficiente di scambio termico per convezione di un fluido caldo che scorre alla temperatura $T_f = 394$ K su una superficie fredda alla temperatura $T_p = 283$ K vale $h = 227$ W/m²K. Determinare il flusso termico unitario trasmesso dal fluido alla superficie.

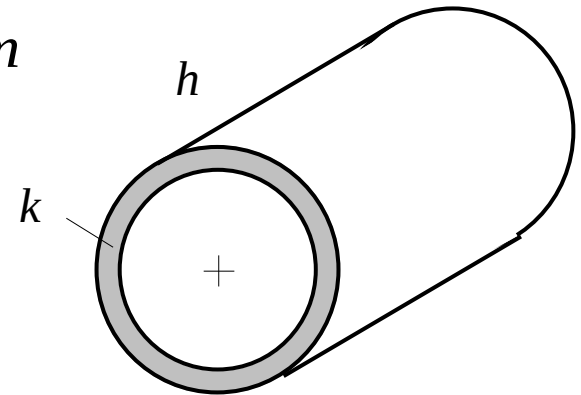
$$\frac{q}{A} = h(T_f - T_p) = 227 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (394 - 283) \text{K} = 25197 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 25,2 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$



Esercizio 3

Determinare il raggio critico per un tubo ricoperto di isolante ($k = 0.208 \text{ W/mK}$) esposto ad aria il cui coefficiente di scambio termico convettivo è $h_i = 8.51 \text{ W/m}^2\text{K}$.

$$r = \frac{k}{h} = \frac{0.208 \frac{\text{W}}{\text{mK}}}{8.51 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} = 0.0244\text{m} = 2.44\text{cm}$$

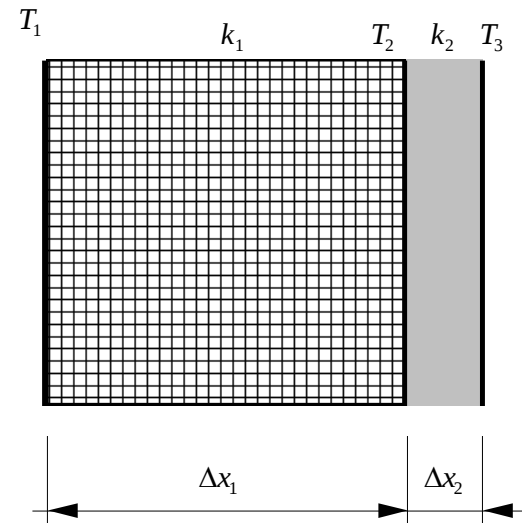


Esercizio 4

Un forno industriale è costruito con una muratura di mattoni ($k_1 = 0.95$ W/mK) spessa 0.22 m ed è ricoperto all'esterno da uno strato di 0.03 m di materiale isolante ($k_2 = 0.06$ W/mK). La superficie interna del muro si trova alla temperatura di 1000°C mentre quella esterna dell'isolante a 40°C. Calcolare la quantità di calore trasmessa per unità di superficie e la temperatura interfacciale fra il muro e l'isolante.

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2}} = \frac{(1000 - 40)K}{\frac{0.22m}{0.95 \frac{W}{mK}} + \frac{0.03m}{0.06 \frac{W}{mK}}} = 1312 \frac{W}{m^2 K}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\Delta x_2}{k_2}} \Rightarrow T_2 = \frac{q}{A} \cdot \frac{\Delta x_2}{k_2} + T_3 = 1312 \frac{W}{m^2} \cdot \frac{0.03m}{0.06 \frac{W}{mK}} + 40^\circ C = 696^\circ C$$



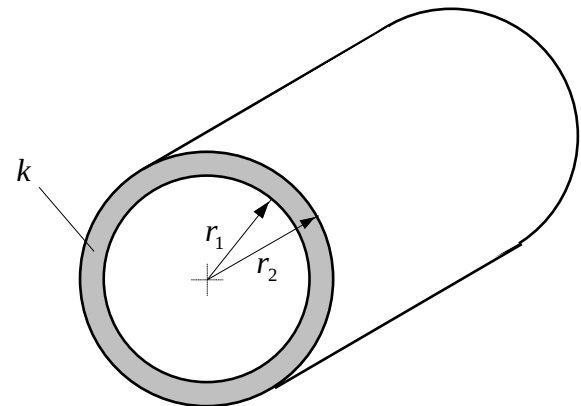
Esercizio 5

In un cilindro di rame, i cui raggi interno ed esterno valgono rispettivamente 1 cm e 1.8 cm, la superficie interna e quella esterna sono mantenute alle temperature $T_1 = 305 \text{ K}$ e $T_2 = 295 \text{ K}$ e k varia con la temperatura secondo la legge $k = k_o(1 + bT_m)$, con $k_o = 371.9 \text{ W/mK}$ e $b = -9.25 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Valutare le perdite di calore per unità di lunghezza.

$$\frac{q}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi k_m}} \quad k_m = k_o(1 + bT_m) \quad T_m = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{305\text{K} + 295\text{K}}{2} = 300\text{K}$$

$$k_m = k_o(1 + bT_m) = 371.9 \frac{\text{W}}{\text{mK}} (1 - 9.25 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}) \cdot 300\text{K} = 361.58 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

$$\frac{q}{L} = \frac{(305 - 295)\text{K}}{\frac{\ln(0.018\text{m}/0.010\text{m})}{2\pi \cdot 361.58 \frac{\text{W}}{\text{mK}}}} = 38.651 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$



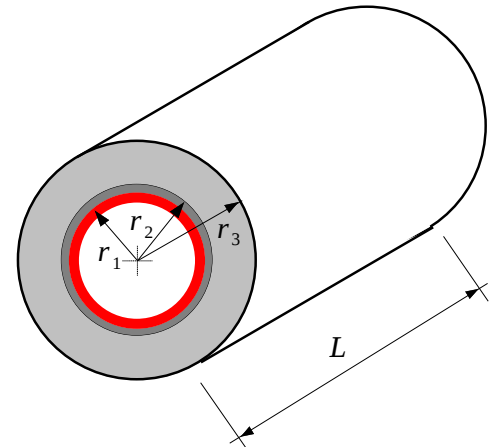
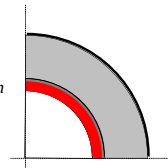
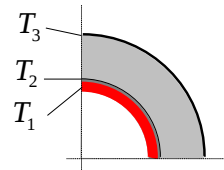
Esercizio 6

Un tubo di acciaio con diametro esterno di 7.5 cm è ricoperto con uno strato di 1.25 cm di materiale plastico ($k_1 = 0.207 \text{ W/mK}$), il quale è a sua volta rivestito da uno strato di 5 cm di lana di vetro ($k_2 = 0.055 \text{ W/mK}$). Sapendo che le temperature esterne del tubo di acciaio e della lana di vetro valgono rispettivamente $T_1 = 200^\circ\text{C}$ e $T_3 = 35^\circ\text{C}$ determinare il flusso termico trasmesso per unità di lunghezza e la temperatura interfacciale fra il materiale plastico e la lana di vetro T_2 .

$$\frac{q}{L} = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2}} = \frac{(200 - 35)K}{\frac{\ln(0.05m/0.0375m)}{2\pi \cdot 0.207 \frac{W}{mK}} + \frac{\ln(0.1m/0.05m)}{2\pi \cdot 0.0548 \frac{W}{mK}}} = 73.85 \frac{W}{m}$$

$$q = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi kL}} \Rightarrow T_2 = T_3 + \frac{q \ln(r_3/r_2)}{2\pi kL} =$$

$$35^\circ\text{C} + \frac{73.85 \frac{W}{m}}{2\pi \cdot 0.055 \frac{W}{mK}} \ln(10\text{cm}/5\text{cm}) = 183.66^\circ\text{C}$$



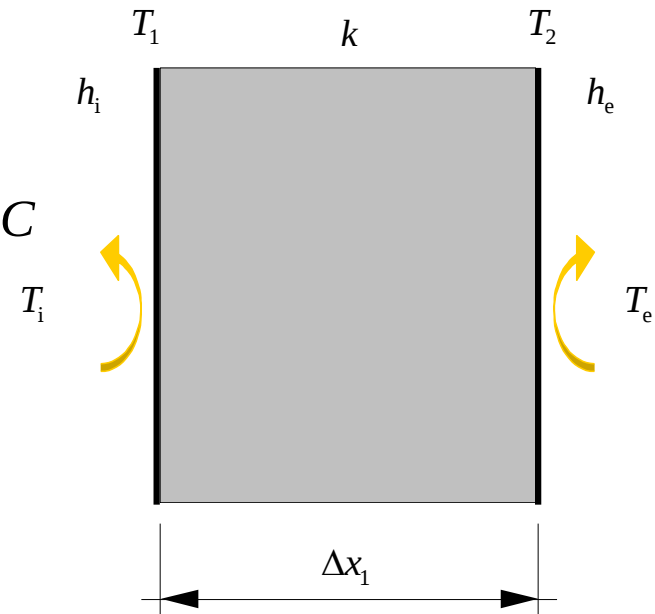
Esercizio 7

Un materiale spesso 15 cm ($k = 0.87 \text{ W/mK}$) è esposto ad aria a 25°C dal lato interno ed a 0°C dal lato esterno. Sapendo che il coefficiente di scambio convettivo interno h_i vale $10.46 \text{ W/m}^2\text{K}$ mentre quello esterno h_e vale $52.3 \text{ W/m}^2\text{K}$ determinare il flusso termico e la temperatura sulle due facce del materiale.

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_e}} = \frac{(25 - 0)K}{\frac{1}{52.3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} + \frac{0.15\text{m}}{0.87 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{1}{10.46 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}} = 87.1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{h_i}} \Rightarrow T_1 = T_i - \frac{q}{h_i A} = 25^\circ\text{C} - \frac{87.1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10.46 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} = 16.7^\circ\text{C}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_2 - T_e}{\frac{1}{h_e}} \Rightarrow T_2 = T_e - \frac{q}{h_e A} = 0^\circ\text{C} + \frac{87.1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{52.3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} = 1.7^\circ\text{C}$$

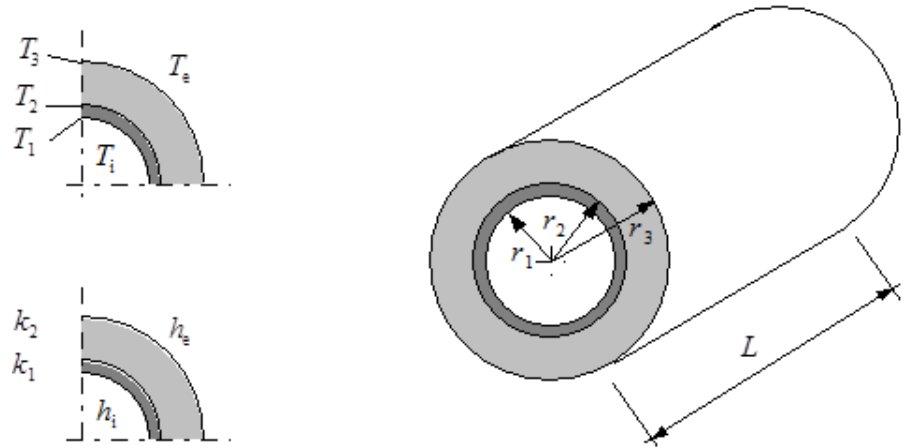


Esercizio 8

Del vapore scorre in un tubo di acciaio con raggio interno pari a 5 cm ed esterno pari a 5.7 cm, rivestito da uno strato di isolante di 2.5 cm. I coefficienti di scambio termico convettivo interno ed esterno valgono rispettivamente $h_i = 87.1 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $h_e = 12.43 \text{ W/m}^2\text{K}$ mentre i coefficienti di conducibilità per l'acciaio e per l'isolante valgono rispettivamente $k_1 = 45 \text{ W/mK}$ e $k_2 = 0.071 \text{ W/mK}$. Determinare il coefficiente globale di scambio termico U .

$$U = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{0.082\text{m}}{0.05\text{m} \cdot 87.1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} + \frac{0.082\text{m} \ln(0.057\text{m}/0.05\text{m})}{45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{0.082\text{m} \ln(0.082\text{m}/0.057\text{m})}{0.071 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{1}{12.43 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}} = 0.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$



Esercizio 9

Un sistema piano è costituito da due strati di materiali ($k_1 = 1.5 \text{ W/mK}$, $k_2 = 1.2 \text{ W/mK}$) entrambi spessi 10 cm, separati da un'intercapedine d'aria di 30 cm ($k_a = 0.022 \text{ W/mK}$). Il sistema separa due ambienti a temperatura $T_1 = 40^\circ\text{C}$ e $T_2 = 20^\circ\text{C}$ per i quali $h_1 = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $h_2 = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$. Determinare il flusso trasmesso sia nel caso in cui l'aria nell'intercapedine non dia luogo a moti convettivi che nel caso in cui questi ultimi siano presenti ($h_a = 2.5 \text{ W/m}^2\text{K}$).

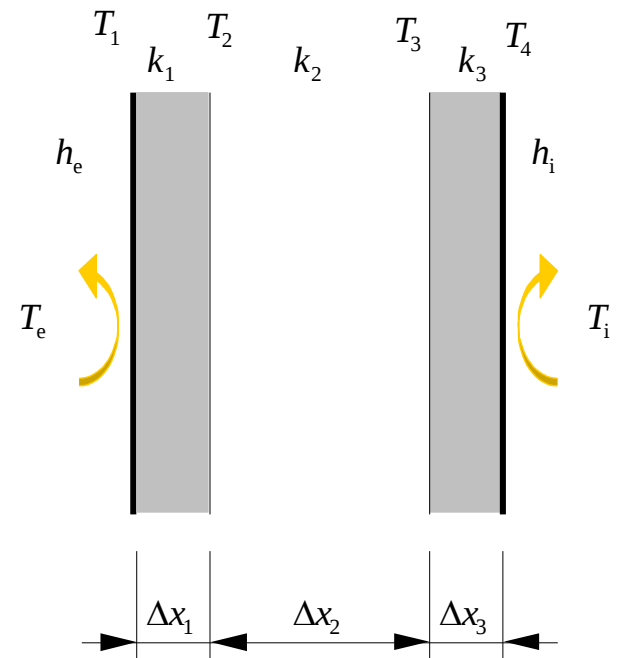
$$\frac{q}{A} = U(T_e - T_i)$$

Supponendo che lo scambio attraverso l'aria avvenga per conduzione:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{1}{h_e}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} + \frac{0.1\text{m}}{1.5 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{0.3\text{m}}{0.022 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{0.1\text{m}}{1.2 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{1}{5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}} = 0.07 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$\frac{q}{A} = U(T_e - T_i) = 0.07 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} (40 - 20)\text{K} = 1.4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

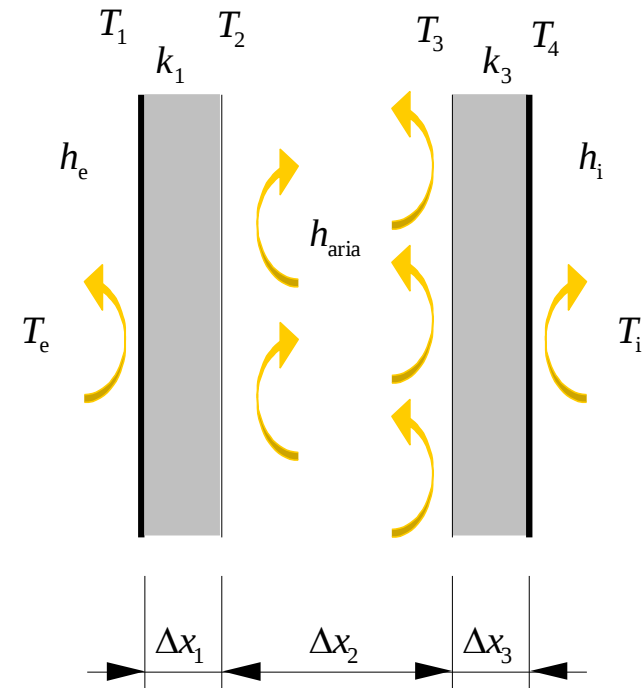


Esercizio 9

Supponendo che lo scambio attraverso l'aria avvenga per convezione:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{1}{h_{aria}} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{1}{h_i}} = \frac{1}{\frac{1}{30 \frac{W}{m^2 K}} + \frac{0.1}{1.5 \frac{W}{mK}} + \frac{1}{2.5 \frac{W}{m^2 K}} + \frac{0.1}{1.2 \frac{W}{mK}} + \frac{1}{5 \frac{W}{m^2 K}}} = 1.26 \frac{W}{m^2 K}$$

$$\frac{q}{A} = U(T_e - T_i) = 1.26 \frac{W}{m^2 K} (40 - 20) K = 25.2 \frac{W}{m^2}$$



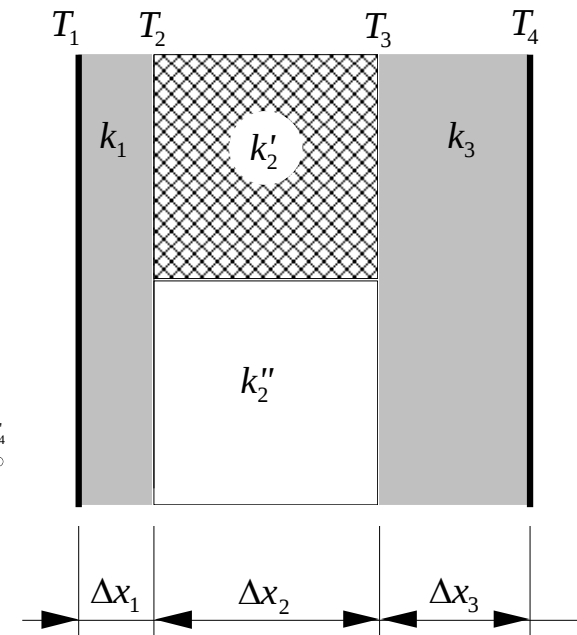
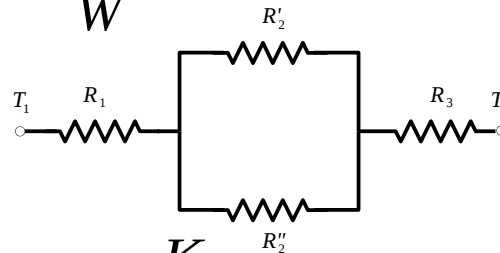
Esercizio 10

Determinare la potenza termica trasmessa attraverso il sistema in figura. I coefficienti di conducibilità termica valgono: $k_1 = 175$ W/mK, $k_{2'} = 35$ W/mK, $k_{2''} = 60$ W/mK, $k_3 = 80$ W/mK e le temperature sulle facce esterne: $T_1 = 370^\circ\text{C}$ e $T_2 = 66^\circ\text{C}$.

$$q = UA\Delta T = UA(T_1 - T_4) \quad UA = \frac{1}{\sum R_i}$$

$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{k_1 A} = \frac{2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1.75 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 0.1 \text{ m}^2} = 0.0014 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$R_3 = \frac{\Delta x_3}{k_3 A} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{80 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 0.1 \text{ m}^2} = 0.00625 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$



Esercizio 10

$$R'_2 = \frac{\Delta x_2}{k'_2 A/2} = \frac{7.5 \cdot 10^{-2} m}{35 \frac{W}{mK} \cdot (0.1 m^2 / 2)} = 0.043 \frac{K}{W}$$

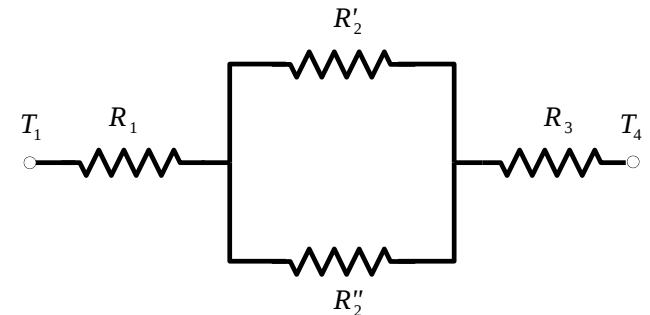
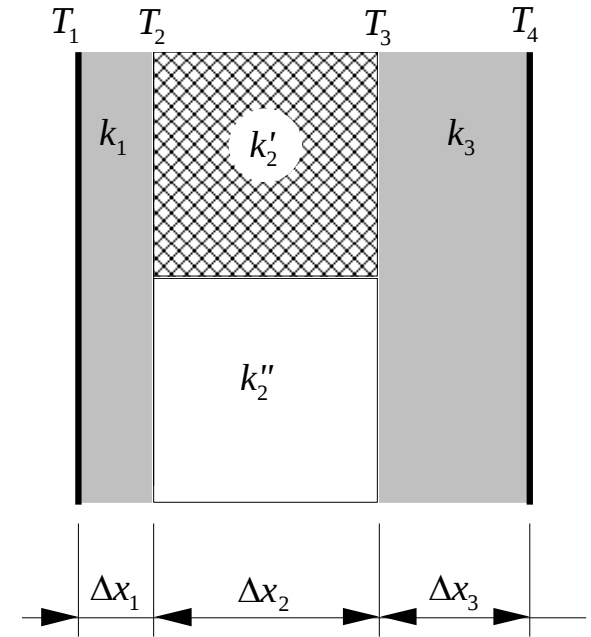
$$R''_2 = \frac{\Delta x_2}{k''_2 A/2} = \frac{7.5 \cdot 10^{-2} m}{60 \frac{W}{mK} \cdot (0.1 m^2 / 2)} = 0.025 \frac{K}{W}$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0.043 \frac{K}{W}} + \frac{1}{0.025 \frac{K}{W}}} = 0.0158 \frac{K}{W}$$

$$R_{TOT} = R_1 + R_2 + R_3 = (0.0014 + 0.0158 + 0.00625) \frac{K}{W} = 0.0234 \frac{K}{W}$$

$$UA = \frac{1}{\sum R_i} = \frac{1}{22.7 \cdot 10^{-3} \frac{K}{W}} = 44 \frac{W}{K}$$

$$q = UA(T_1 - T_4) = 44 \frac{W}{K} (370 - 66) K = 13.4 kW$$

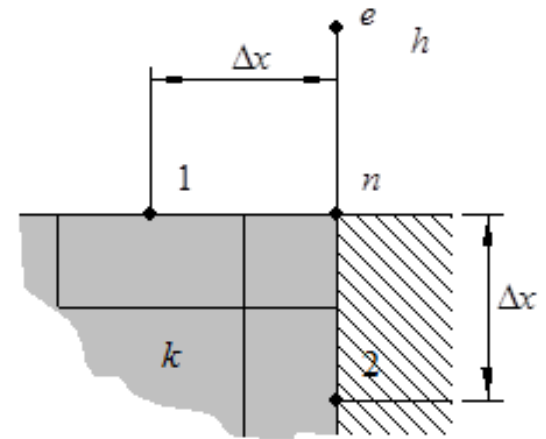


Esercizio 11

Derivare l'equazione della temperatura nodale per un nodo in un angolo esterno nei due casi:

- a) uno dei lati contigui isolato e l'altro soggetto ad uno scambio termico convettivo;
- b) entrambi i lati contigui isolati.

$$\begin{aligned} \frac{k\Delta x^2}{2} \frac{(T_1 - T_n)}{\Delta x} + \frac{k\Delta x^2}{2} \frac{(T_2 - T_n)}{\Delta x} + \frac{h\Delta x^2(T_e - T_n)}{2} &= 0 \\ = \frac{k\Delta x}{2} (T_1 - T_n) + \frac{k\Delta x}{2} (T_2 - T_n) + \frac{h\Delta x^2(T_e - T_n)}{2} &= 0 \\ T_1 - T_n + T_2 - T_n + \frac{h\Delta x}{k} (T_e - T_n) &= 0 \\ T_1 + T_2 + \frac{h\Delta x}{k} \cdot T_e - \left(2 + \frac{h\Delta x}{k}\right) T_n &= 0 \end{aligned}$$

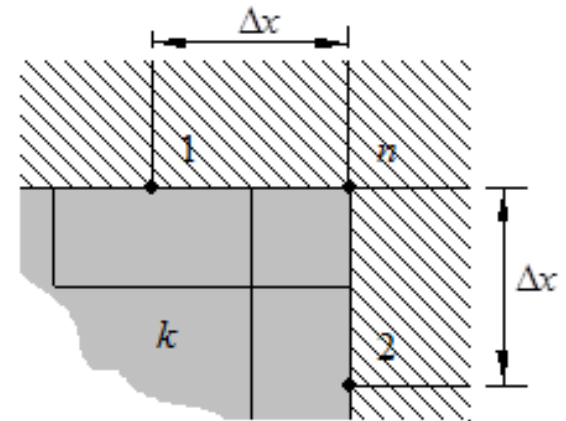


Esercizio 11

$$\frac{k\Delta x^2}{2} \frac{(T_1 - T_n)}{\Delta x} + \frac{k\Delta x^2}{2} \frac{(T_2 - T_n)}{\Delta x} = 0$$

$$T_1 - T_n + T_2 - T_n = 0$$

$$T_1 + T_2 - 2T_n = 0$$



Esercizio 12

Determinare le temperature nodali nei punti a, b, c sapendo che il materiale è omogeneo ed isotropo e che le temperature delle superfici interna ed esterna valgono rispettivamente $T_i = 150^\circ\text{C}$ e $T_e = 50^\circ\text{C}$.

nodo a: $T_b' + T_b + T_i + T_e - 4T_a = 0$

nodo b: $T_i + T_c + T_a + T_e - 4T_b = 0$

nodo c: $T_b + T_i + T_e + T_b - 4T_c = 0$

nodo a: $T_b' + T_b + 50 + 50 - 4T_a = 0$

nodo b: $150 + T_c + T_a + 50 - 4T_b = 0$

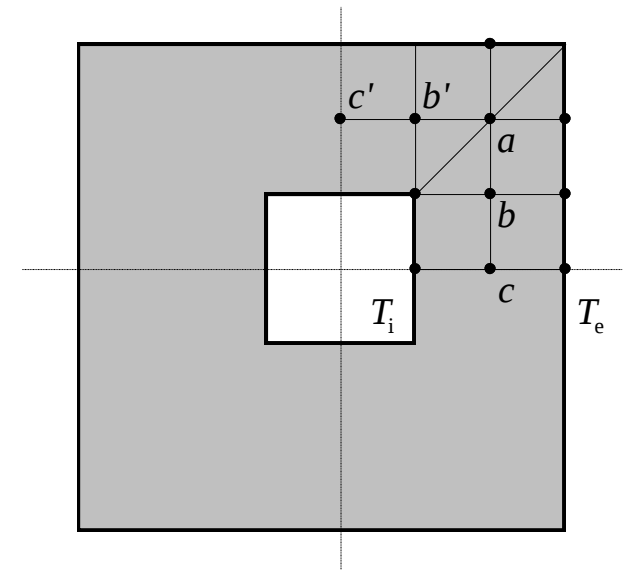
nodo c: $T_b + 150 + 50 + T_b - 4T_c = 0$

$T_b = T_b'$ e $T_c = T_c'$. Pertanto :

$$2T_b + 100 - 4T_a = 0 \Rightarrow 2T_a - T_b = 50$$

$$T_c + 100 - 4T_a = 0 \Rightarrow -T_a + 4T_b - T_c = 200$$

$$2T_b + 200 - 4T_c = 0 \Rightarrow -T_b + 2T_c = 100$$

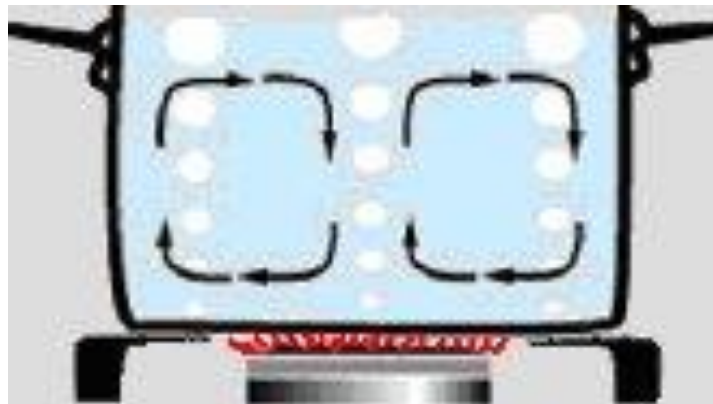


$$T_a = 70.8^\circ\text{C}; \quad T_b = 91.6^\circ\text{C}; \quad T_c = 95.6^\circ\text{C}.$$

Convezione

E' un processo di trasporto di energia mediante l'azione combinata della conduzione, dell'accumulo di energia e del mescolamento: a livello molecolare, allo scambio termico per conduzione si affianca un trasporto di energia interna dovuto al moto relativo delle particelle.

E' il più importante meccanismo di scambio termico tra una superficie solida ed un liquido o un gas.

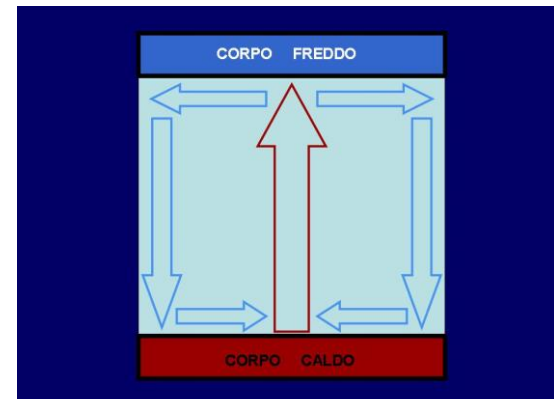


Meccanismo fisico

Il calore passa per conduzione dalla superficie alle particelle di fluido adiacenti e l'energia trasmessa ne fa aumentare l'energia interna e la temperatura.

Il flusso di calore genera nel fluido variazioni della densità degli strati più prossimi alla superficie e si genera un moto del fluido più leggero verso l'alto (si ha quindi flusso tanto di materia che di energia).

Quando le particelle di fluido riscaldate raggiungono una regione a temperatura minore, nuovamente del calore viene trasmesso per conduzione da quelle più calde a quelle più fredde.



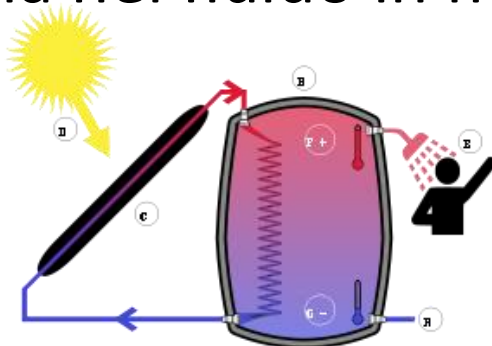
Convezione naturale e forzata

La convezione si distingue in *naturale* e *forzata*, secondo la causa che determina il moto.

Naturale: quando dipende solo da differenze di densità dovute a gradienti di temperatura

Forzata: quando è dovuta a cause indipendenti dalla trasmissione di calore (differenze di pressione indotte da agenti esterni come una pompa o un ventilatore)

In entrambi i casi, i moti convettivi trasferiscono l'energia nel fluido in modo essenzialmente analogo.



Equazione di Newton

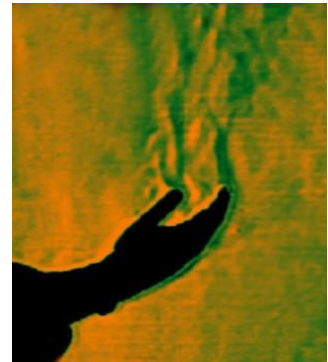
Nella zona adiacente la superficie il calore fluisce per conduzione

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{con } n \text{ versore normale alla superficie.}$$

La stessa potenza si trasmette nel fluido. Può esprimersi con la:

$$q = hA(T_s - T_f)$$

EQUAZIONE DI NEWTON



T_s = temperatura della superficie

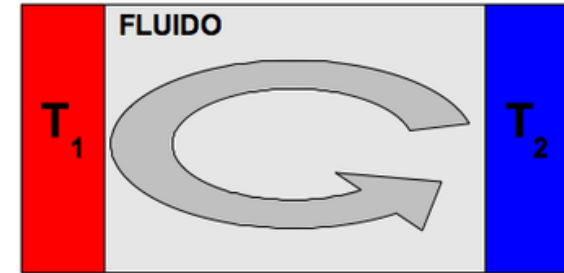
T_f = temperatura del fluido ad una distanza dalla superficie tale da non risentire dello scambio termico (teoricamente distanza infinita)

h = coefficiente di convezione: non è una costante, dipende dalla geometria della superficie, dalla velocità, dalla natura e dalle proprietà fisiche del fluido ed, in alcuni casi, anche dalla differenza di temperatura.

Numero di Nusselt

Eguagliando le due espressioni:

$$h(T_s - T_f) = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

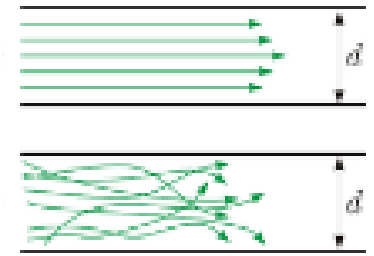


Di solito ***h*** viene inserito in un raggruppamento adimensionale, detto **numero di Nusselt**.

Moltiplicando ambo i membri per L (lunghezza significativa) e riordinando:

$$Nu = \frac{hL}{K} = \frac{L}{(T_f - T_s)} \frac{\partial T}{\partial n}$$

Metodologie di analisi



Per la complessità del fenomeno della convezione nello studio si possono seguire due vie:

a) metodo analitico: richiede la risoluzione delle equazioni differenziali riguardanti sia gli aspetti meccanici del moto che quelli termici.

Il problema è tuttavia di difficile soluzione e spesso a prezzo di semplificazioni che limitano la fedeltà del modello matematico alla realtà fisica

b) metodo empirico: tende pragmaticamente alla determinazione empirica di regole di calcolo, utilizzando dati sperimentali per ricavare leggi e correlazioni.

In tal modo si esclude tuttavia a priori la pretesa di spiegare la natura dei fenomeni studiati.

Equazione generale della convezione

$$dq + dq_g - dL = dU$$

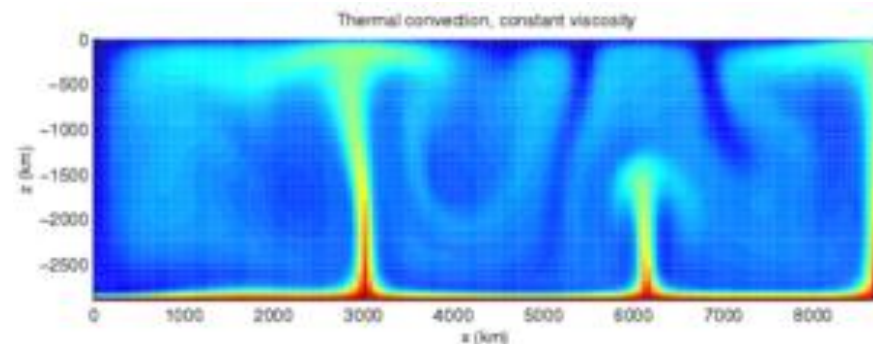
Il lavoro è compiuto contro le forze applicate all'elemento di volume, gli sforzi di pressione e quelli tangenziali. E' di solito trascurabile; può conglobarsi formalmente nel termine dq_g .

La derivata della temperatura $T = T(x, y, z, t)$ rispetto al tempo, trattandosi di particella in moto, deve essere totale:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \text{grad}T \cdot v$$

Si ottiene:

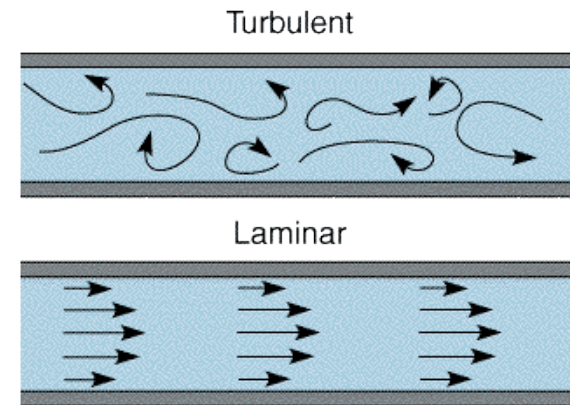
$$\alpha \nabla^2 T + \frac{q_g}{\rho c} = \frac{dT}{dt}$$



Distribuzione di velocità

E' l'equivalente dell'equazione di Fourier scritta per la convezione e può integrarsi se si conosce la distribuzione della velocità, che indipendentemente dalla natura del moto (laminare o turbolento) è determinata dalla soluzione del sistema:

- a) l'equazione di continuità (bilancio di massa)
- b) l'equazione del moto di Newton.



Il sistema è tuttavia praticamente insolubile se non si ricorre ad ipotesi semplificative più o meno gravose, quali quelle di fluido incompressibile, convezione naturale pura o forzata pura, strato limite, ecc. o a metodi di calcolo approssimato (calcolo numerico).



Analisi dimensionale

Non comporta equazioni da risolvere, ma basandosi sulla considerazione che tutte le leggi fisiche sono espresse con equazioni dimensionalmente omogenee, realizza il raggruppamento adimensionale delle variabili da cui dipende un fenomeno fisico.

Si basa sull'organizzazione in leggi di dati sperimentali ricavati dall'osservazione, al fine di individuare l'influenza esercitata sul fenomeno da ciascuna grandezza da cui dipende.

Adottando il **SI**, le dimensioni fondamentali sono: lunghezza ***L***, massa ***M***, tempo ***t***, temperatura ***T***.

Teorema di Buckingham



Il numero di gruppi adimensionali indipendenti, che si possono formare dalla combinazione delle n variabili fisiche di un problema è uguale al numero totale delle grandezze fisiche che lo descrivono meno il numero m delle dimensioni fondamentali richieste per esprimere le espressioni dimensionali delle grandezze fisiche

se $N_1, N_2, \dots, N_n$ è l'insieme di tutti i raggruppamenti adimensionali ottenibili, la soluzione può esprimersi:

$$F(N_1, N_2, \dots, N_N) = 0 \quad \text{con} \quad N = n - m$$

Parametri della convezione

Nel caso di contemporanea presenza di *convezione naturale e forzata*, la distribuzione della temperatura in un fluido in moto è determinabile in funzione dei parametri fisici

$$\underline{h, k, \nu, \alpha, g\beta}$$

e delle condizioni al contorno

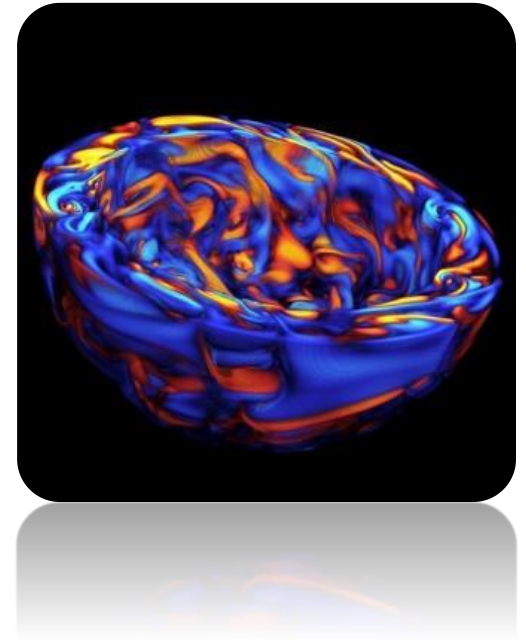
$$\underline{L, \nu, \Delta T = |T_s - T_f|}$$

$$Ni = Ni(h, k, \nu, \alpha, g\beta, L, \nu, \Delta T)$$

$$n = 8, m = 4$$



gruppi adimensionali ottenibili: 4



Raggruppamenti adimensionali

$$Ni = h^a \cdot k^b \cdot \nu^c \cdot \alpha^d \cdot g\beta^e \cdot L^f \cdot v^g \cdot \Delta T^h$$

$$h = Mt^{-3}T^{-1}$$

$$k = MLt^{-3}T^{-1}$$

$$\nu = L^2t^{-1}$$

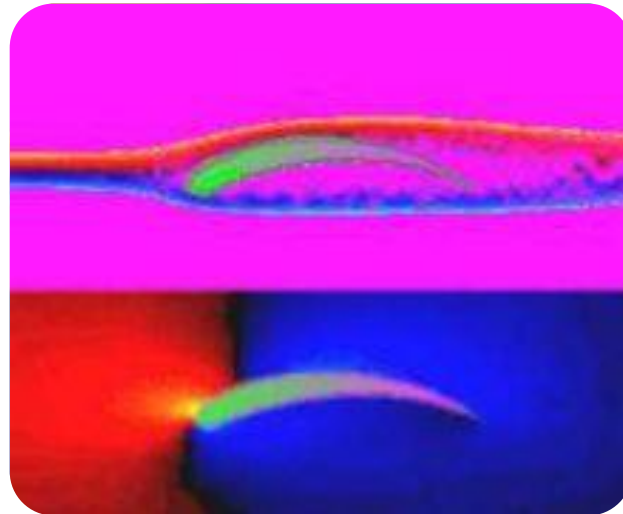
$$\alpha = L^2t^{-1}$$

$$g\beta = Lt^{-2}T^{-1}$$

$$L = L$$

$$v = Lt^{-1}$$

$$\Delta T = T$$



$$Ni = [Mt^{-3}T^{-1}]^a [MLt^{-3}T^{-1}]^b [L^2t^{-1}]^c [L^2t^{-1}]^d [Lt^{-2}T^{-1}]^e [L]^f [Lt^{-1}]^g [T]^h = M^0 L^0 t^0 T^0$$

Risoluzione del sistema

Perché i raggruppamenti siano adimensionali, la somma algebrica degli esponenti di ciascuna dimensione fondamentale deve essere nulla:

$$M : a + b = 0$$

$$L : b + 2c + 2d + e + f + g = 0$$

$$t : -3a - 3b - c - d - 2e - g = 0$$

$$T : -a - b - e + h = 0$$

Essendo 8 le incognite e 4 le equazioni, si possono fissare arbitrariamente i valori di 3 esponenti. Risolvendo il sistema si trovano i 4 raggruppamenti.

Raggruppamenti adimensionali

$$N_1 = \frac{h L}{k} = Nu$$

Numero di Nusselt

$$N_2 = \frac{\rho V L}{\mu} = Re$$

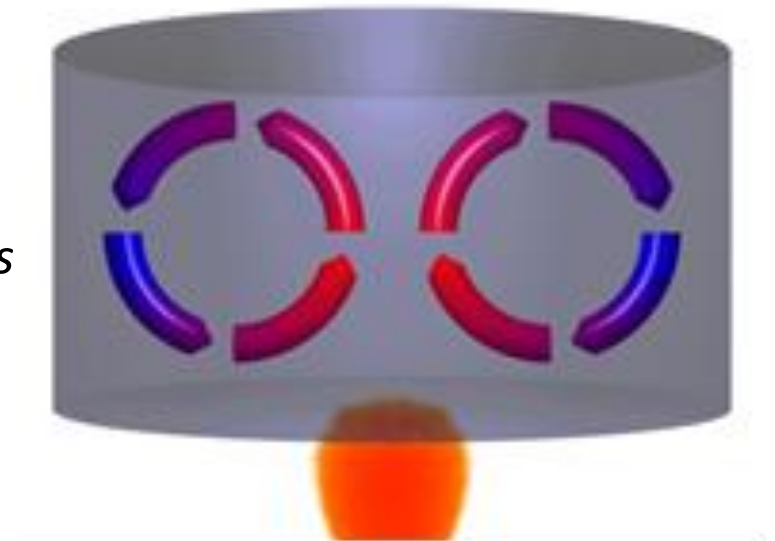
Numero di Reynolds

$$N_3 = \frac{g \beta L^3 \Delta T}{\nu^2} = Gr$$

Numero di Grashof

$$N_4 = \frac{\nu}{\alpha} = Pr$$

Numero di Prandtl



$$F(Nu, Pr, Re, Gr) = 0$$

$$Nu = Nu(Pr, Re, Gr)$$

$$Nu = C \cdot Re^a \cdot Gr^b \cdot Pr^c$$

Convezione forzata

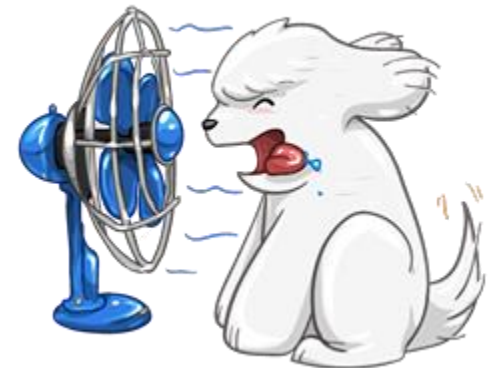
In convezione forzata:

$$g\beta = 0$$

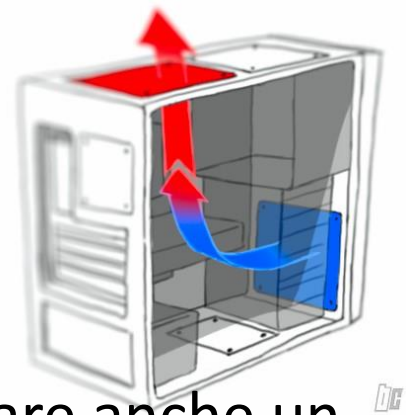
per cui il numero delle variabili presenti nell'equazione che esprime il generico raggruppamento N_i , passa da 8 a 7 ed i raggruppamenti diventano 3 (scompare il **Numero di Grashof**)

$$Nu = Nu(Pr, Re)$$

$$Nu = C \cdot Re^a \cdot Pr^b$$



Convezione naturale



In convezione naturale $v = 0$.

Riducendosi di uno il numero delle variabili, scompare anche un raggruppamento, il **Numero di Reynolds**

$$Nu = Nu(Gr, Pr) \quad \longrightarrow \quad Nu = C \cdot Gr^a \cdot Pr^b$$

La gran parte degli studi sulla convezione naturale esprime il numero di Nusselt in funzione del prodotto $GrRe$, anziché dei due numeri separatamente, ossia gli esponenti a e b sono uguali

$$Nu = c \cdot (Gr \cdot Pr)^a$$

Per l'enorme quantità di studi condotti sull'argomento e la varietà di leggi proposte, è tuttavia possibile trovare in diversi testi espressioni più o meno differenti da quelle riportate

Esercizio 1

Un materiale ($k = 0.87 \text{ W/mK}$) spesso 15 cm ed alto 3 m, è esposto dal lato interno, che si trova alla temperatura di 20°C , ad aria a 34°C e dal lato esterno ad aria ($h_e = 53 \text{ W/m}^2\text{K}$) a 0°C . Determinare il flusso termico trasmesso per unità di area.

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_e}}$$

$$Nu = \frac{h_i L}{k} \Rightarrow h_i = \frac{Nu \cdot k}{L}$$

T_i

h_i

$$Nu = c \cdot (Gr \cdot Pr)^n$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$Gr = \frac{g \beta L^3 \Delta T}{\nu^2}$$

T_2

T_e

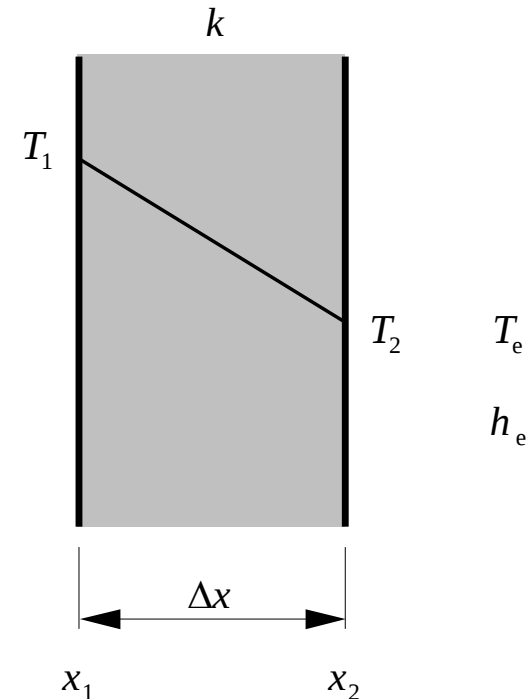
h_e

$$T_m = \frac{T_i + T_1}{2} = \frac{34^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C}}{2} = 27^\circ\text{C}$$

$$\nu = 1,5682 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\alpha = 2,2160 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$k = 0,02622 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

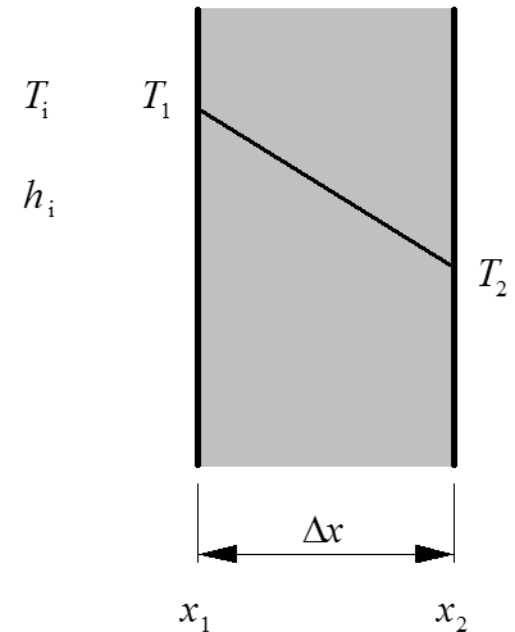


Esercizio 1

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = 0,708 \quad \text{Gr} = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2} = 0,502 \cdot 10^{11} \quad \Rightarrow \quad \text{Gr Pr} = 0,355 \cdot 10^{11}$$

$$\text{Nu} = c \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^n = 420,7 \quad c = 0,13; \quad n = 1/3$$

$$h_i = \frac{\text{Nu} \cdot k}{L} = \frac{420,7 \cdot 0,02622 \frac{\text{W}}{\text{mK}}}{3\text{m}} = 3,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$



$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_e}} = \frac{34\text{K}}{\frac{1}{3,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}} + \frac{0,15\text{m}}{0,87 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{1}{53 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}}} = 74,07 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

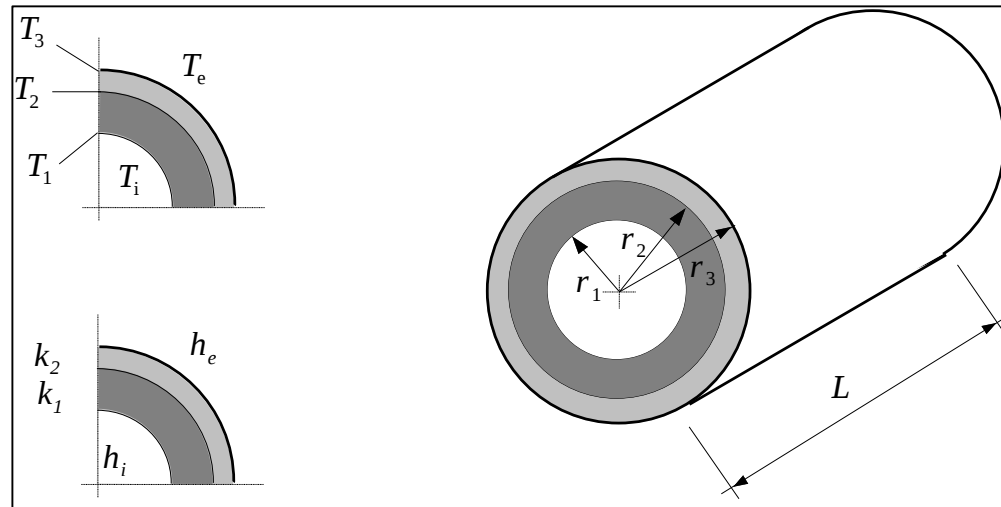
Esercizio 2

Del vapor d'acqua (h_i 100 W/m²K) alla temperatura di 120°C scorre in un tubo d'acciaio ($k_1 = 45$) avente temperatura interna di 117°C. Il tubo ha raggio interno di 5 cm ed esterno di 5.5 cm, è ricoperto da uno strato di 2.5 cm di isolante ($k_2 = 0.07$ W/mK) ed è esposto ad aria a 17°C. Determinare le due temperature interfacciali dell'isolante e il numero di Nusselt per la convezione naturale dell'aria esterna.

$$\frac{q}{L} = 2\pi r_1 h_i (T_i - T_1) = 2\pi \cdot 0.05m \cdot 100 \frac{W}{m^2 K} \cdot 3K = 94.2 \frac{W}{m}$$

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{q \cdot \ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}$$

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{q \cdot \ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}$$



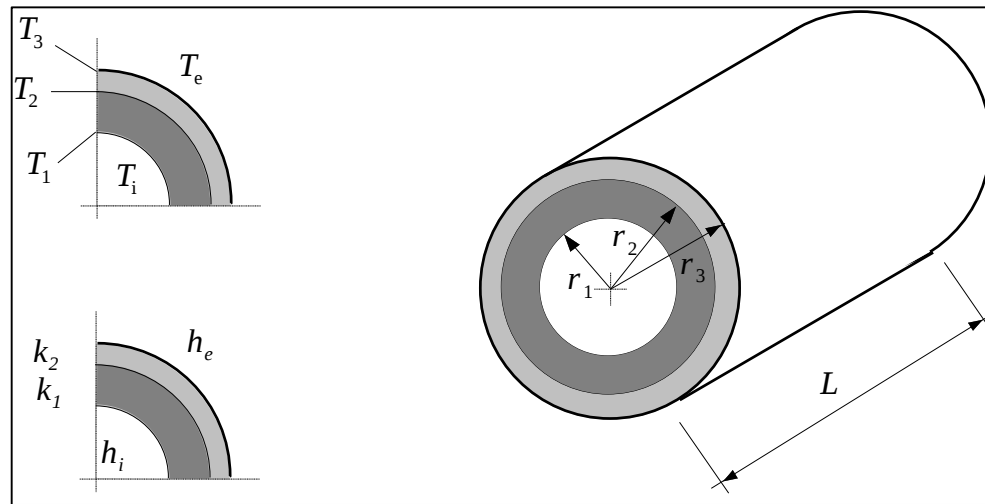
Esercizio 2

$$T_2 = T_1 - \frac{q \cdot \ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} \Rightarrow T_2 = 117^\circ\text{C} - \frac{94.2 \frac{\text{W}}{\text{m}} \cdot \ln\left(\frac{0.055\text{m}}{0.05\text{m}}\right)}{2\pi \cdot 45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} \cong 117^\circ\text{C}$$

Per l'elevata conducibilità termica dell'acciaio ed il piccolo spessore del tubo il salto termico sulle sue facce non risulta apprezzabile

$$T_3 = T_2 - \frac{q \cdot \ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} \Rightarrow$$

$$T_3 = 117^\circ\text{C} - \frac{94.2 \frac{\text{W}}{\text{m}} \cdot \ln\left(\frac{0.080\text{m}}{0.055\text{m}}\right)}{2\pi \cdot 0.07 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} = 36.7^\circ\text{C}$$



Esercizio 2

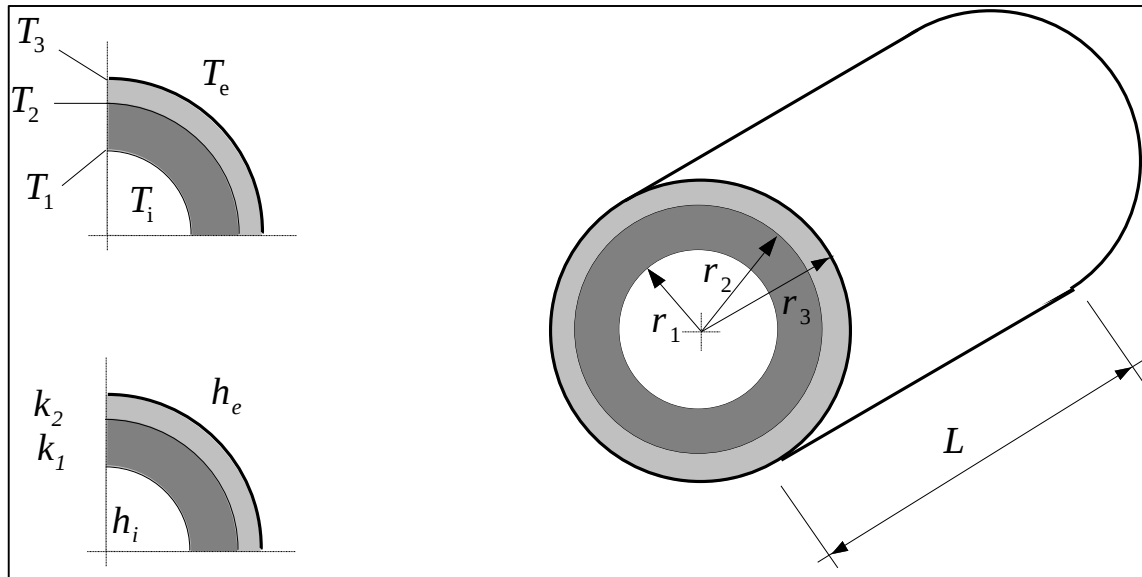
$$Nu = \frac{h_e D}{k_{aria}}$$

$$T_m = \frac{T_3 + T_e}{2} = \frac{36.7^\circ\text{C} + 17^\circ\text{C}}{2} = 26.9^\circ\text{C}$$

$$k_{aria} = 0,02622$$

$$\frac{q}{L} = 2\pi r_3 h_e (T_3 - T_e) \Rightarrow h_e = \frac{q}{2\pi r_3 L (T_3 - T_e)} = \frac{94.2 \frac{\text{W}}{\text{m}}}{2\pi \cdot 0,08\text{m} \cdot (36.7 - 17)\text{K}} = 9.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$Nu = \frac{h_e D}{k_{aria}} = \frac{9.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 0.16\text{m}}{0.02622 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} = 58$$



Esercizio 3

Del vapor d'acqua alla temperatura di 130°C scorre alla velocità di 10 cm/s in un tubo d'acciaio ($k_1 = 45 \text{ W/mK}$) avente temperatura interna di 110°C e raggi interno ed esterno rispettivamente pari a 10 ed 11 cm. Il tubo è rivestito di uno strato di 3 cm di isolante ($k_2 = 0.17 \text{ W/mK}$) ed è esposto ad aria ($h_i = 12 \text{ W/m}^2\text{K}$). Calcolare il valore del coefficiente globale di scambio termico U .

$$U = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e}}$$

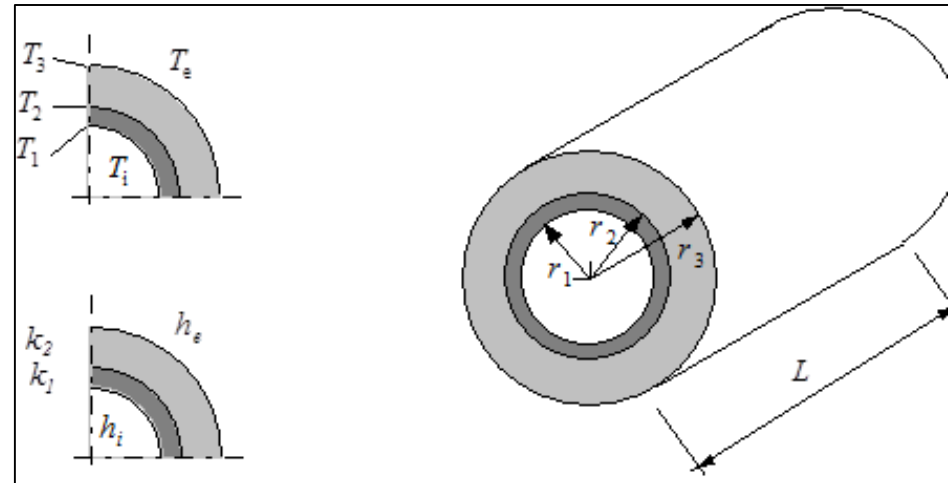
$$Nu = \frac{h_i D}{k} \Rightarrow h_i = \frac{Nu k}{D}$$

$$T_m = \frac{T_i + T_1}{2} = \frac{130^\circ\text{C} + 110^\circ\text{C}}{2} = 120^\circ\text{C}$$

$$\nu = 2,47 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\alpha = 17,08 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$k = 0,685 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$



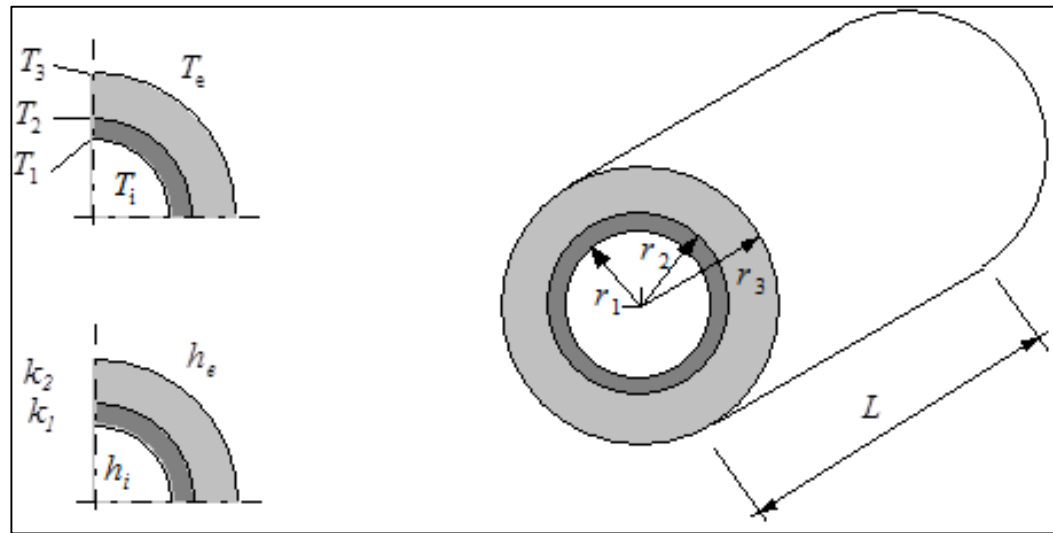
Esercizio 3

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{2.47 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{17.08 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 1.446$$

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.2 \text{m}}{2.47 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 80971.6$$

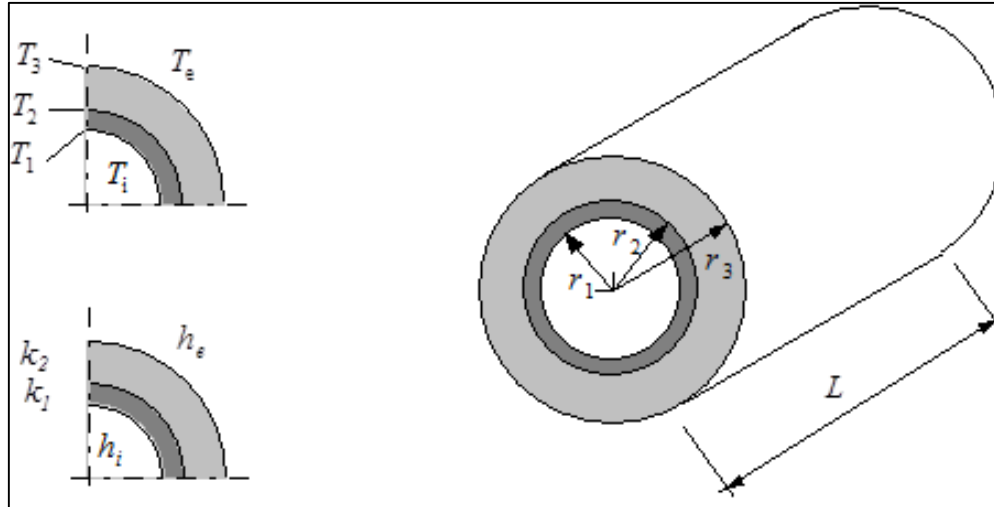
$$Nu = 0.023 \cdot \text{Re}^{0.8} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

$$0.023(80971.6)^{0.805} (1.446)^{1/3} = 219.5$$



$$h = \frac{Nu k}{D} = \frac{219.5 \cdot 0.685 \frac{\text{W}}{\text{mK}}}{0.2 \text{m}} = 751.8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Esercizio 3



$$U = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{0.13m}{0.1m \cdot 751.8 \frac{W}{m^2 K}} + \frac{0.13m \cdot \ln(0.11m / 0.10m)}{45 \frac{W}{mK}} + \frac{0.13m \cdot \ln(0.13m / 0.11m)}{0.17 \frac{W}{mK}} + \frac{1}{12 \frac{W}{m^2 K}}} = 4.7 \frac{W}{m^2 K}$$

Esercizio 4

Un conduttore di rame, avente un diametro di 1.8 mm ed una resistenza elettrica di 0.065 Ω/m , è isolato da una guaina ($k_g = 0.118 \text{ W/mK}$) dello spessore di 1 mm ed è esposto ad aria a 20°C.

Sapendo che la temperatura esterna della guaina è 84°C, determinare lo spessore critico dell'isolante e la corrente che attraversa il conduttore.

$$r_{cr} - r_1 = \frac{k_g}{h} - \frac{d_1}{2} \quad I = \sqrt{\frac{q}{R}}$$

$$Nu = \frac{hL}{k} \Rightarrow h = \frac{Nu \cdot k}{L}$$

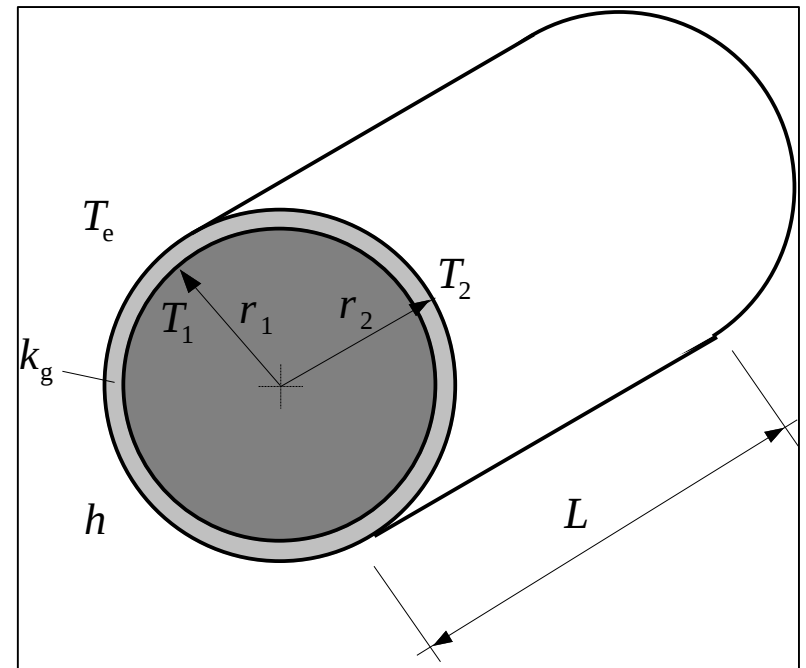
$$Nu = c \cdot (Gr \cdot Pr)^n$$

$$T_m = \frac{T_i + T_1}{2} = \frac{84^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C}}{2} = 52^\circ\text{C}$$

$$\nu = 1,8213 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\alpha = 2,5996 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$k = 0,02811 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

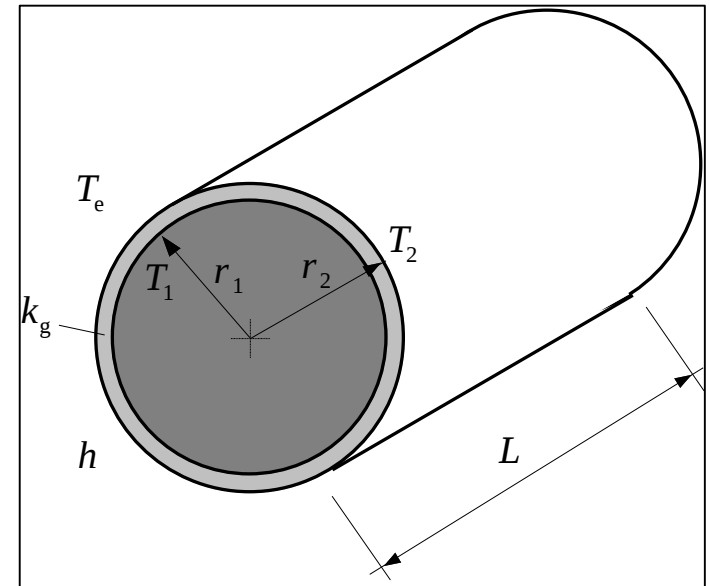


Esercizio 4

$$Gr = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2} = \frac{\left(9.8 \frac{m}{sec^2}\right) \left(\frac{1}{325} K^{-1}\right) (64K) (3.8 \cdot 10^{-3} m)^3}{\left(1.8213 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{sec}\right)^2} = 319.23$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{1.8213 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}{2.5996 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 0,7$$

$$Gr \cdot Pr = 223.65$$



$$Nu = 2.51$$

Per il range in questione ($10^{-1} < GrPr < 10^4$) si fa riferimento ad un diagramma:

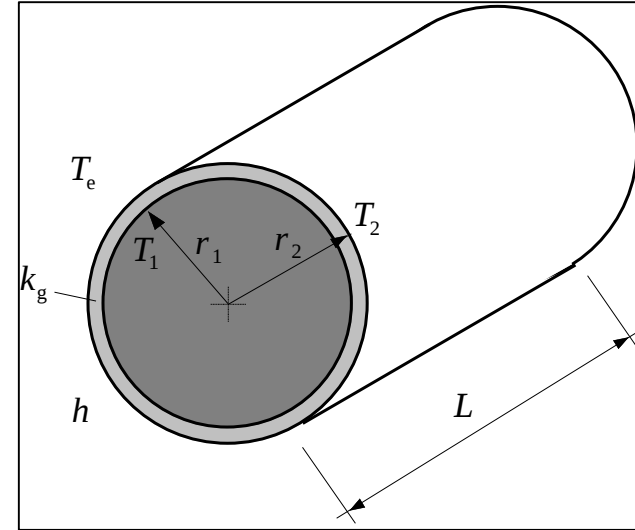
Esercizio 4

$$h = \frac{Nu \cdot k}{L} = \frac{2.51 \cdot 0.0281 \frac{W}{mK}}{3.8 \cdot 10^{-3} m} = 18.57 \frac{W}{m^2}$$

$$r_{cr} - r_1 = \frac{k_g}{h} - \frac{d_1}{2} = \frac{0.118 \frac{W}{mK}}{18.57 \frac{W}{m^2 K}} - \frac{1.8 \cdot 10^{-3} m}{2} = 5,45 mm$$

$$\frac{q}{L} = 2\pi r_2 h (T_e - T_2) = 2\pi \cdot 1.9 \cdot 10^{-3} m \cdot 18.57 \frac{W}{m^2 K} \cdot 64 K = 14.19 \frac{W}{m}$$

$$I = \sqrt{\frac{q/L}{R/L}} = \sqrt{\frac{14.19 W/m}{0.065 \Omega/m}} = 14.77 A$$



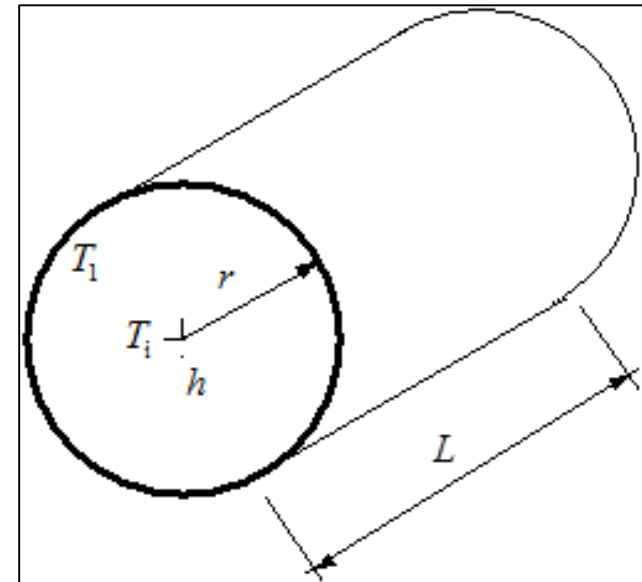
Esercizio 5

Un tubo lungo 3 m, avente diametro interno pari a 25 mm, è percorso da una corrente d'aria ($h_e = 53,3 \text{ W/m}^2\text{K}$) alla temperatura di 220°C , con portata di 6 g/s. Determinare la diminuzione di temperatura subita dal fluido nel condotto, supponendo di ritenere costante il flusso termico sullaparete e la differenza di temperatura fluido-parete (20°C) ($c_p = 1.005 \text{ kJ/kgK}$).

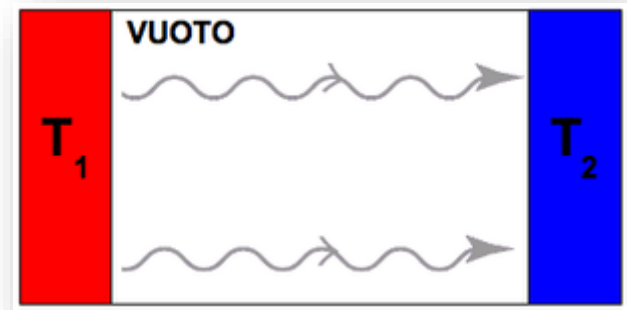
$$q = 2\pi L h \Delta T = 2\pi \cdot 0.0125\text{m} \cdot 3\text{m} \cdot 53.3 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 20^\circ\text{C} = 251,3\text{W}$$

$$q = Gc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{q}{Gc}$$

$$\Delta T = \frac{q}{Gc} = \frac{251.3\text{W}}{6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1005 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}} = 41.7^\circ\text{C}$$



Irraggiamento



Un sistema circondato dal vuoto (per cui non può scambiare energia per contatto con altri sistemi) tende a raffreddarsi, dimostrando che è possibile il verificarsi di flusso di energia termica anche in assenza di conduzione o di convezione.

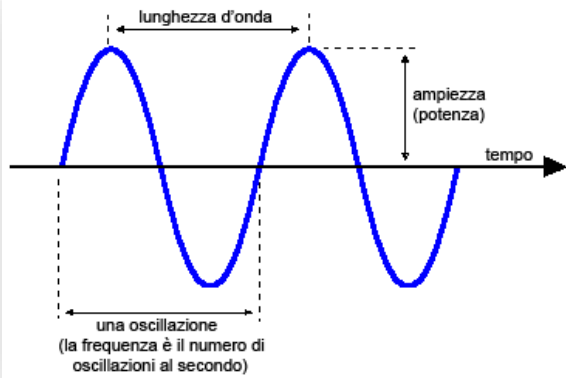
Il meccanismo che ha luogo anche nel vuoto è l'***irraggiamento***, definito come ***l'energia radiante emessa da un mezzo a causa della sua temperatura.***

Emissione per irraggiamento



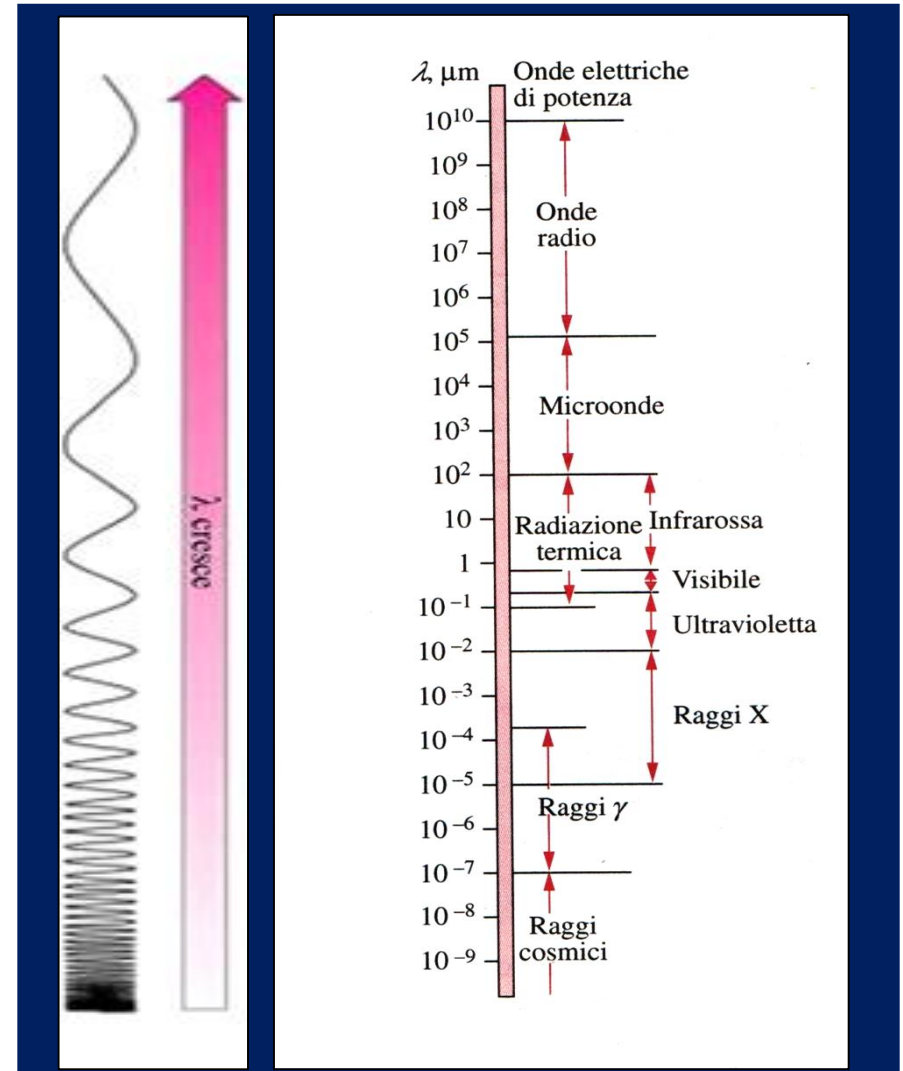
Tutti i corpi emettono continuamente calore per irraggiamento e l'intensità dell'emissione dipende dalla temperatura e dalla natura della superficie ed avviene a scapito dell'energia interna.

L'emissione termica per irraggiamento diviene sempre più importante al crescere della temperatura del corpo; a temperature prossime a quella atmosferica può spesso essere trascurato.



Radiazioni termiche

L'energia raggiante viaggia alla velocità della luce e presenta una fenomenologia simile a quella delle radiazioni luminose, che può essere descritta con la teoria delle onde.

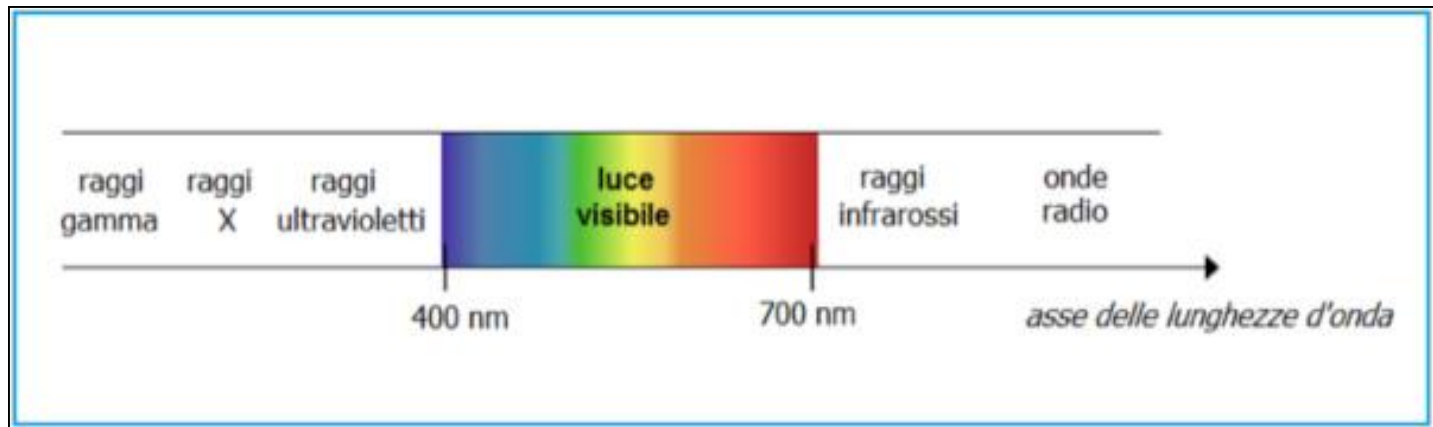


λ radiazioni termiche

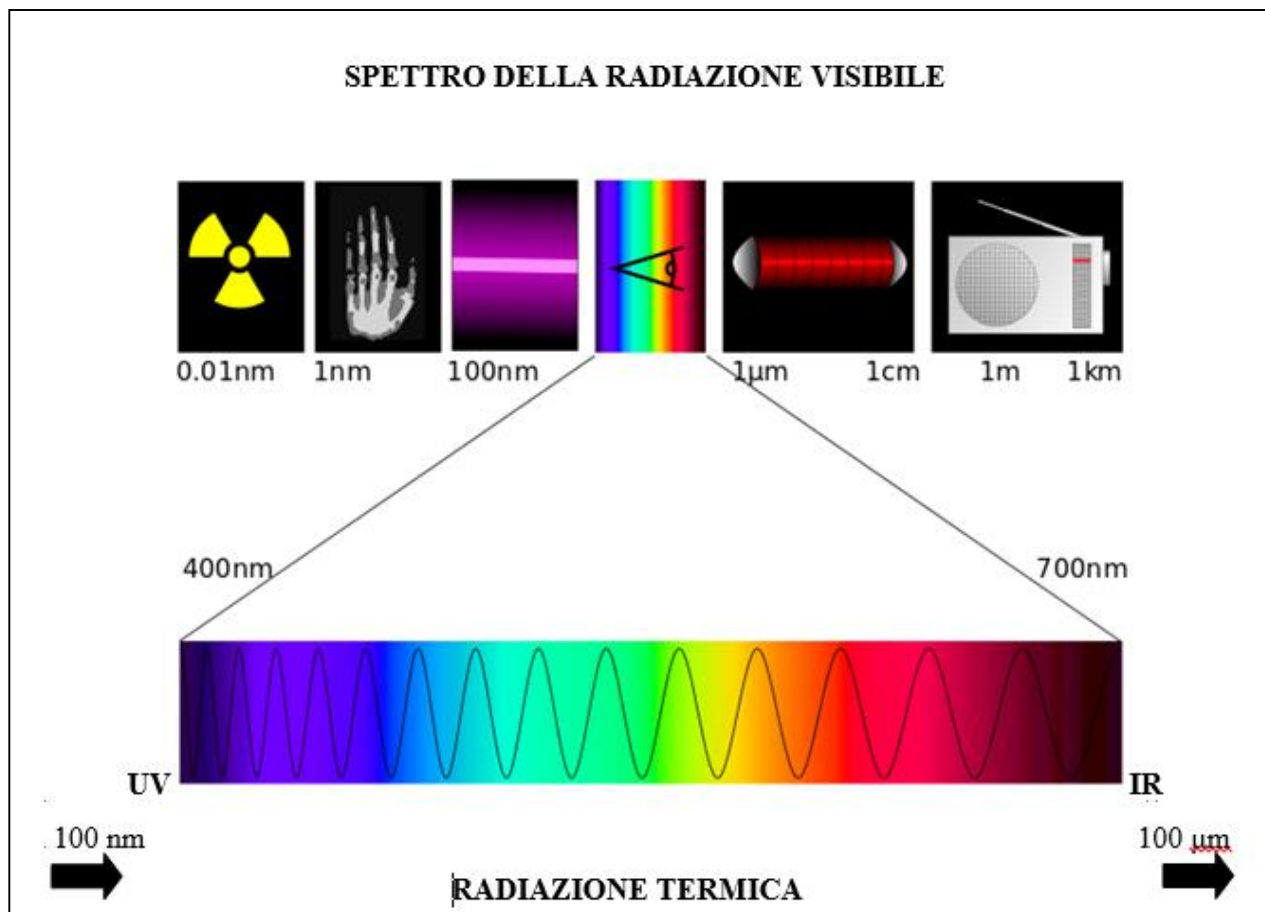
La luce e l'irraggiamento differiscono solo per la lunghezza d'onda:

radiazioni visibili: $400 < \lambda < 700 \text{ nm}$

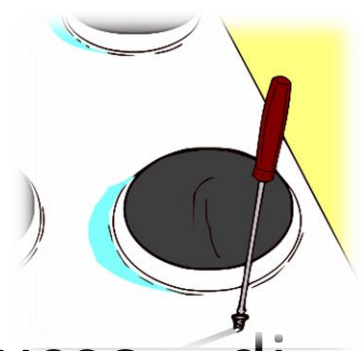
radiazioni termiche: $0,1 \text{ }\mu\text{m} (100 \text{ nm}) < \lambda < 100 \text{ }\mu\text{m}$.



Spettro delle radiazioni



Potere emissivo monocromatico



Potere emissivo monocromatico: flusso di radiazione emesso nell'unità di tempo dall'unità di superficie di un corpo, per unità di intervallo $d\lambda$, in tutte le direzioni; si esprime in $\frac{W}{m^2 \mu m}$

Potere emissivo totale E : flusso di radiazione emesso per unità di area e di tempo su tutto lo spettro, in tutte le direzioni; si misura in $\frac{W}{m^2}$

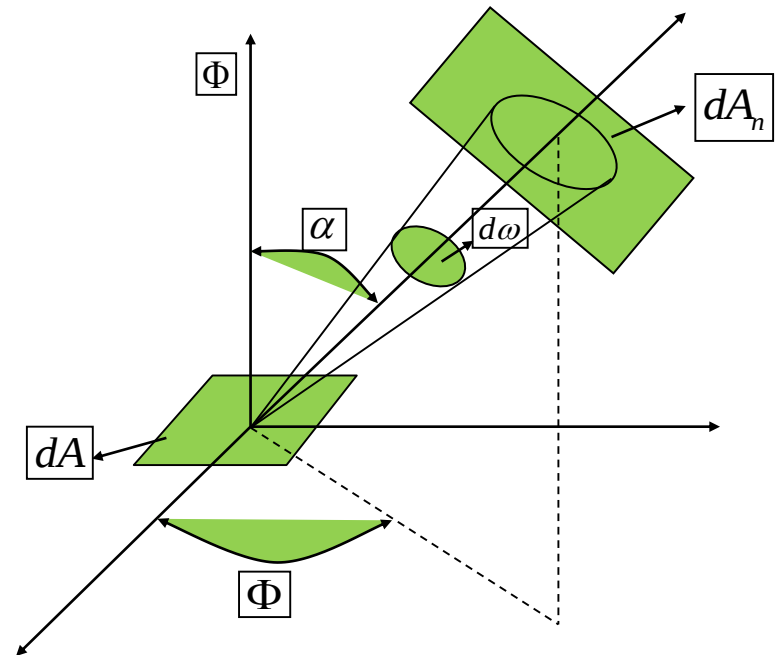
$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda = \frac{q}{A}$$

Potere emissivo angolare

Potere emissivo angolare: flusso di radiazione emesso nell'unità di tempo dall'unità di superficie di un corpo, per unità di angolo solido $d\omega$; si esprime in

$$\frac{W}{m^2 sr}$$

$$\frac{q}{A} = E = \int_0^{2\pi} i \, d\omega$$



Legge di *Planck*

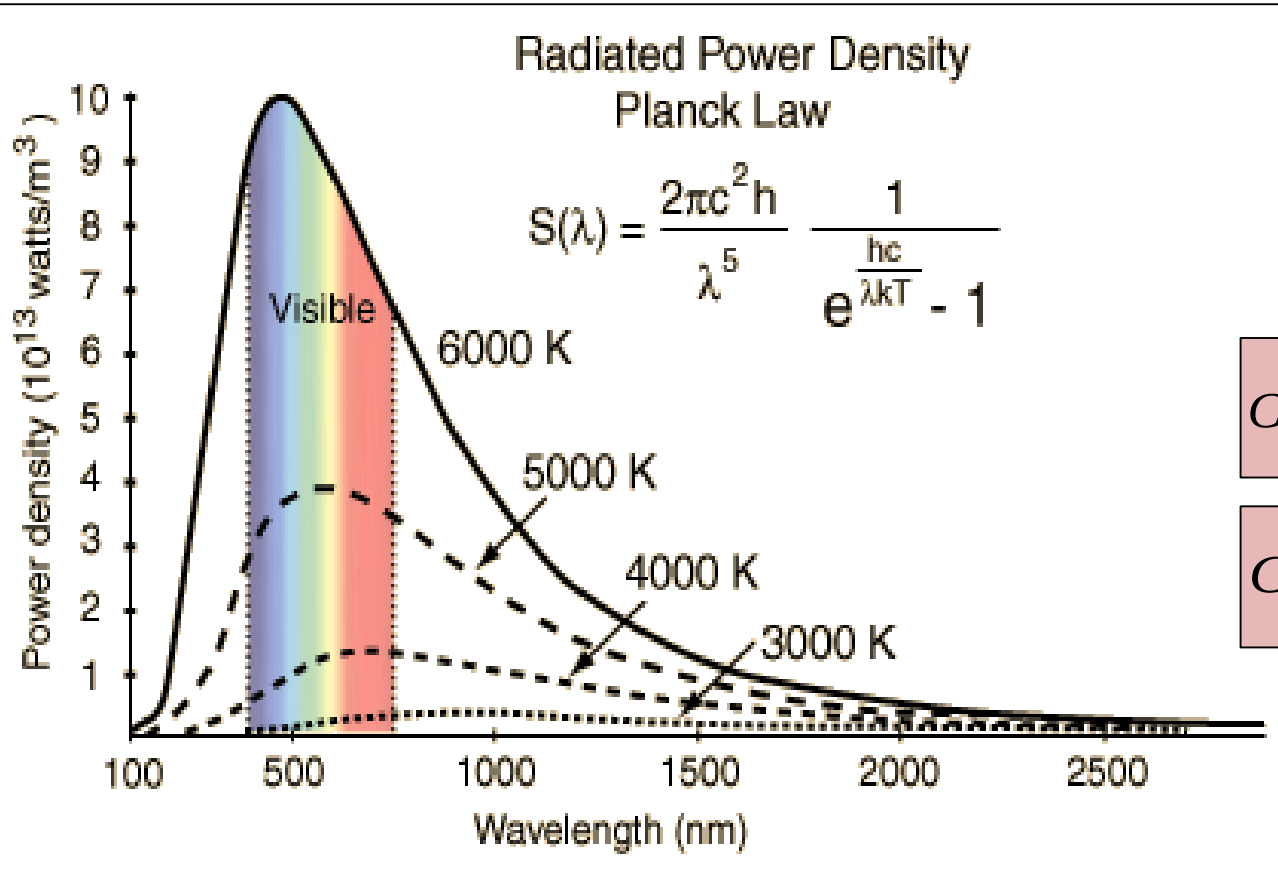
$$E_{\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)}$$

$$C_1 = 2\pi c^2 h = 3.742 \cdot 10^8 \frac{W \mu m^4}{m^2}$$

$$C_2 = \frac{hc}{k} = 1.439 \cdot 10^4 \mu m K$$

$$h = 6.6256 \cdot 10^{-34} J \cdot sec; k = 1.3805 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$$



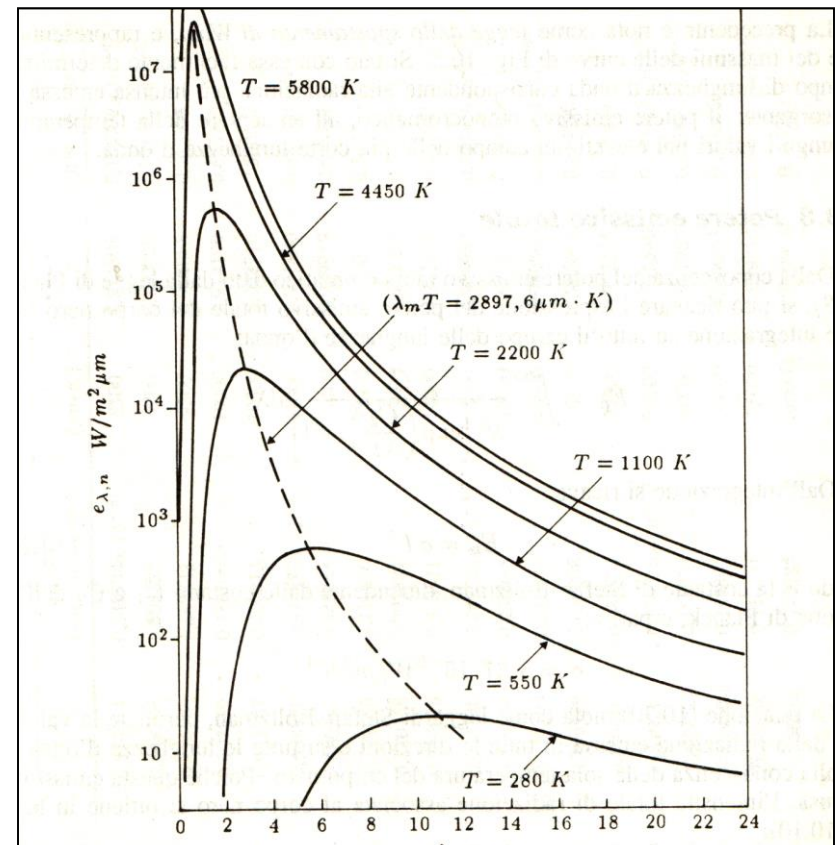
Legge di Wien



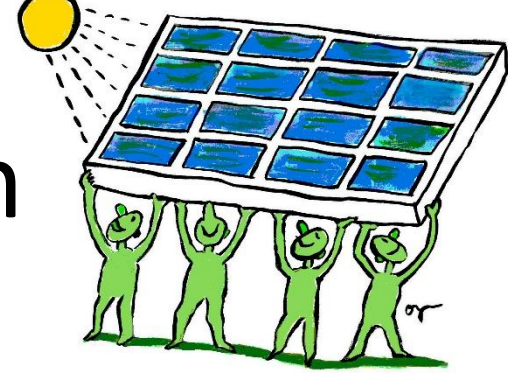
Alle temperature più elevate le emissioni più intense avvengono nel campo delle lunghezze d'onda del visibile, mentre alle temperature più basse, inferiori a 700-800 K, le emissioni sono invisibili.

Ad ogni curva corrisponde un massimo associato ad un valore λ_{max} variabile con T che si sposta, al crescere della temperatura, verso lunghezze d'onda minori.

$$\lambda_m T = \text{cost} = 2897.6 \mu\text{mK}$$



Legge di Stefan-Boltzmann



Integrando l'espressione di E_λ , data dalla legge di PLANCK, su tutto il campo delle lunghezze d'onda, si ottiene l'espressione di E , che rappresenta geometricamente l'area sottesa dalle curve aventi come parametro T :

$$\frac{q}{A} = E = \int_0^{\infty} E_\lambda d\lambda = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.6697 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Effetto serra

Si può illustrare il fenomeno sulla base delle leggi di Planck e di Wien

Sole:

- corpo nero a $T \approx 5760 \text{ K}$
- massimo di emissione nel visibile, per $\lambda_{\text{max}} = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$ (500 nm)
- emissione radiante a bassa lunghezza d'onda ($0,2 \text{ }\mu\text{m} \leq \lambda \leq 3 \text{ }\mu\text{m}$).



Terra:

- corpo nero a $T \approx 288 \text{ K}$
- massimo di emissione nell'infrarosso, per $\lambda_{\text{max}} = 10 \text{ }\mu\text{m}$
- emissione radiante nell'infrarosso (fra 4 e 40 μm) invisibile.

Effetto serra



Superfici selettive:

manifestano un comportamento diverso in relazione all'assorbimento ed alla riflessione della radiazione nei diversi campi di lunghezza d'onda.

Vetro:

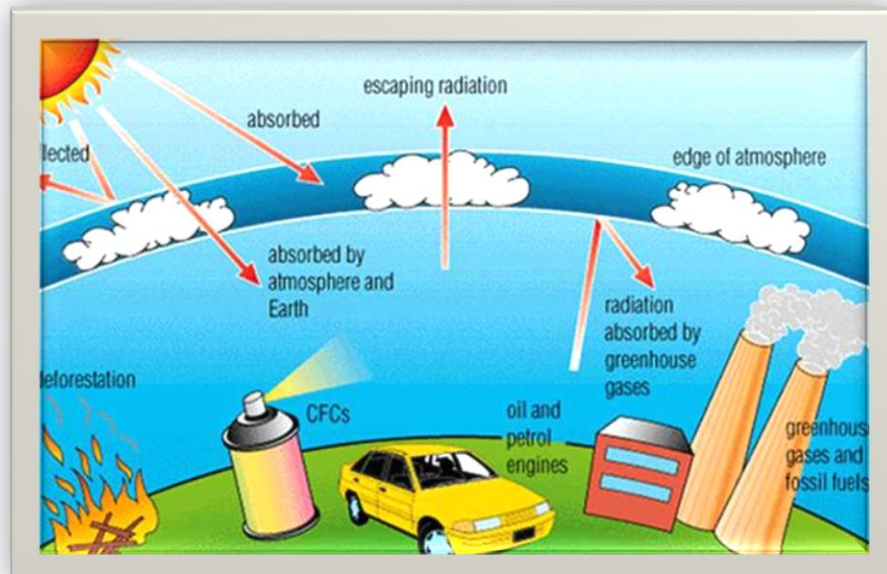
trasparente per radiazioni visibili e del primo infrarosso ($0,4 \mu\text{m} < \lambda < 2,5 \mu\text{m}$)

opaco per $\lambda > 2,5-3 \mu\text{m}$

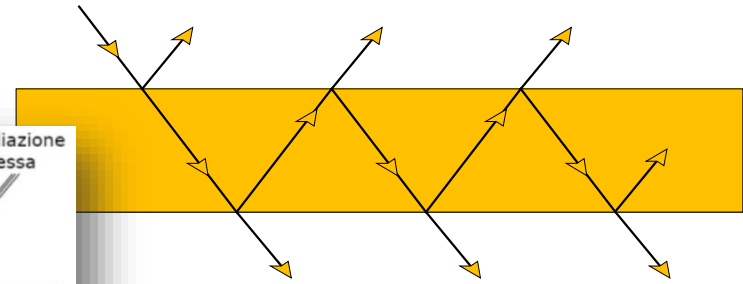
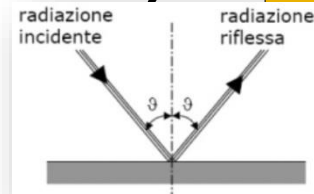
questa proprietà permette alla radiazione solare di attraversare la superficie, ma impedisce alla radiazione infrarossa di uscirne, causando un aumento della temperatura (*effetto serra*).

Effetto serra

L'effetto serra si verifica a scala più vasta sulla Terra, dove alcuni gas presenti in atmosfera trasmettono la radiazione solare in ingresso, ma assorbono quella infrarossa emessa dalla Terra: ciò dà origine ad un surriscaldamento, in crescita per l'incremento di origine antropica delle concentrazioni dei gas di serra, che genera cambiamenti climatici.



Riflessione, assorbimento, trasmissione



Quando una radiazione colpisce la superficie che separa due mezzi diversi, parte dell'energia incidente viene riflessa e parte penetra nel secondo mezzo: la proporzione tra le due frazioni dipende dall'angolo di incidenza sulla superficie e dal suo grado di trasparenza.

Se il secondo mezzo attraversato ha spessore finito, sulla seconda superficie di separazione ancora parte dell'energia viene riflessa e parte trasmessa; la parte riflessa torna nuovamente sulla prima superficie, dove viene nuovamente in parte riflessa ed in parte trasmessa.

Coefficienti di riflessione, assorbimento, trasmissione

Al termine del processo, dell'energia specifica incidente G (irradianza), un'aliquota G_r verrà riflessa nel primo mezzo, un'aliquota G_a verrà assorbita dal secondo mezzo ed un'aliquota G_t verrà trasmessa, ossia:

$$G = G_r + G_a + G_t$$

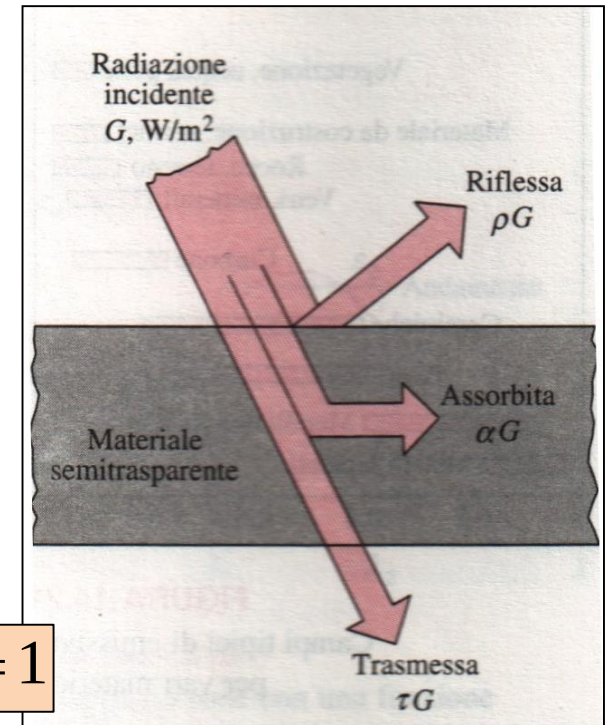
r : coefficiente di riflessione

t : coefficiente di trasmissione

a : coefficiente di assorbimento

$$r = \frac{G_r}{G}; \quad t = \frac{G_t}{G}; \quad a = \frac{G_a}{G}$$

$$G = rG + aG + tG \quad \Rightarrow \quad r + a + t = 1$$



r , t , a dipendono dalla natura del corpo, dalla sua temperatura e dalla lunghezza d'onda della radiazione

Corpi trasparenti, riflettenti, assorbenti

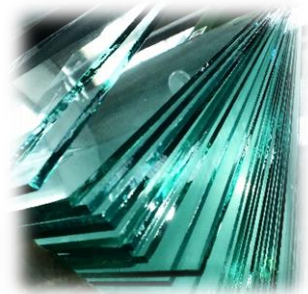
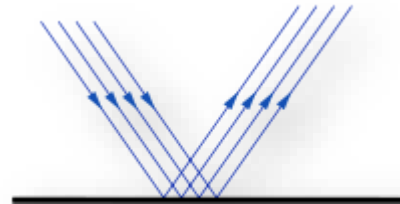
Un corpo per il quale:

$r = 1$ è perfettamente riflettente

$t = 1$ è perfettamente trasparente

$t = 0$ è opaco

$a = 1$ è perfettamente assorbente o nero



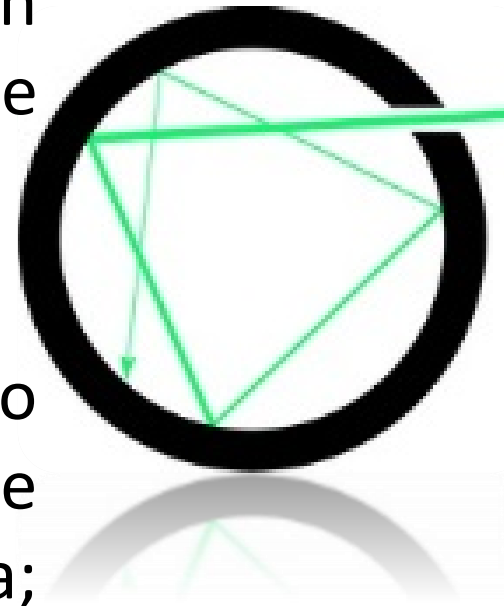
Il corpo nero rappresenta un modello ideale di corpo capace di assorbire tutta l'energia incidente indipendentemente dalla lunghezza d'onda.

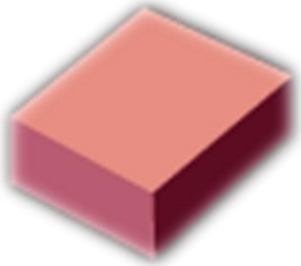
E' anche un corpo ideale che emette la massima energia che può essere emessa da un corpo.

Corpo nero

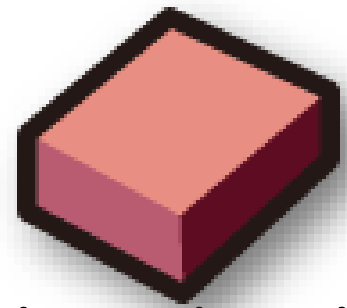
Può realizzarsi considerando una cavità isoterma, con pareti interne riflettenti, che comunichi con l'esterno attraverso un forellino molto piccolo rispetto alle dimensioni della cavità

Qualunque radiazione che penetri nel foro subisce delle riflessioni multiple sulle pareti e ad ogni incidenza resta in parte assorbita; quando infine fuoriesce è stata così indebolita che a tutti gli effetti può considerarsi interamente assorbita.





Emissività



Raramente i corpi godono delle proprietà dei corpi neri, ma emettono radiazioni in misura minore

L'energia emessa dai corpi reali può essere valutata introducendo l'*emissività* e , definita come:

rapporto fra l'energia emessa da una superficie reale e quella che, a parità di condizioni, emette un corpo nero

$e = 1$ per un corpo nero; $0 < e < 1$ per tutti gli altri corpi

e dipende dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura e, se l'emissione non è diffusa, anche dalla direzione

Potere emissivo di un corpo reale

Potere emissivo monocromatico ed integrale di una superficie reale

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = e(\lambda, T)E_{n\lambda}(\lambda, T)$$

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} e(\lambda, T)E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda$$

Anche il coefficiente di assorbimento ***a*** di un corpo reale dipende dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura

$$a(\lambda, T) = e(\lambda, T)$$



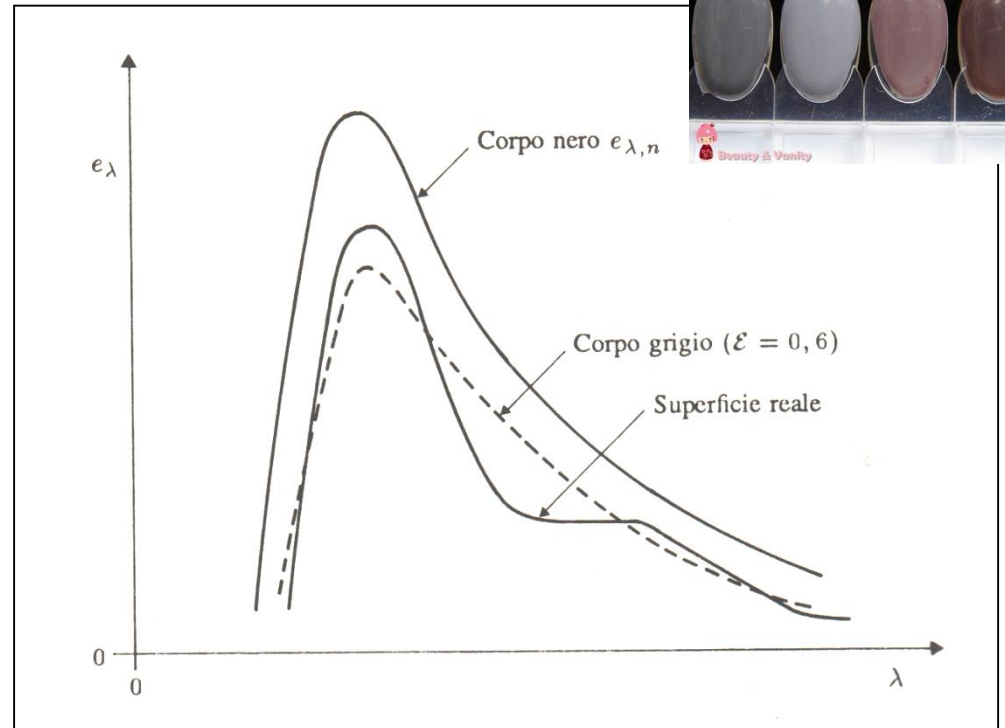
Corpo grigio

Se ad una temperatura uguale a quella del corpo nero un corpo reale emette, per ogni lunghezza d'onda, una frazione costante dell'energia emessa dal corpo nero viene detto **corpo grigio**. Per i corpi grigi ϵ ed a sono uniformi in tutto il campo di lunghezza d'onda:

$$a(T) = e(T)$$

$$\frac{q}{A} = e(T) \int_0^{\infty} E_n(\lambda, T) d\lambda = e \sigma T^4$$

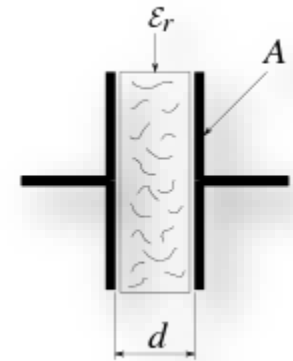
La forma della curva spettrale è simile a quella di una superficie nera, ma l'altezza è ridotta del valore dell'emissività.



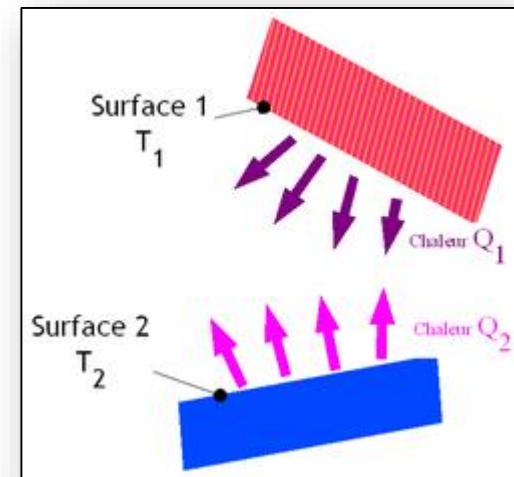
Fattore di vista



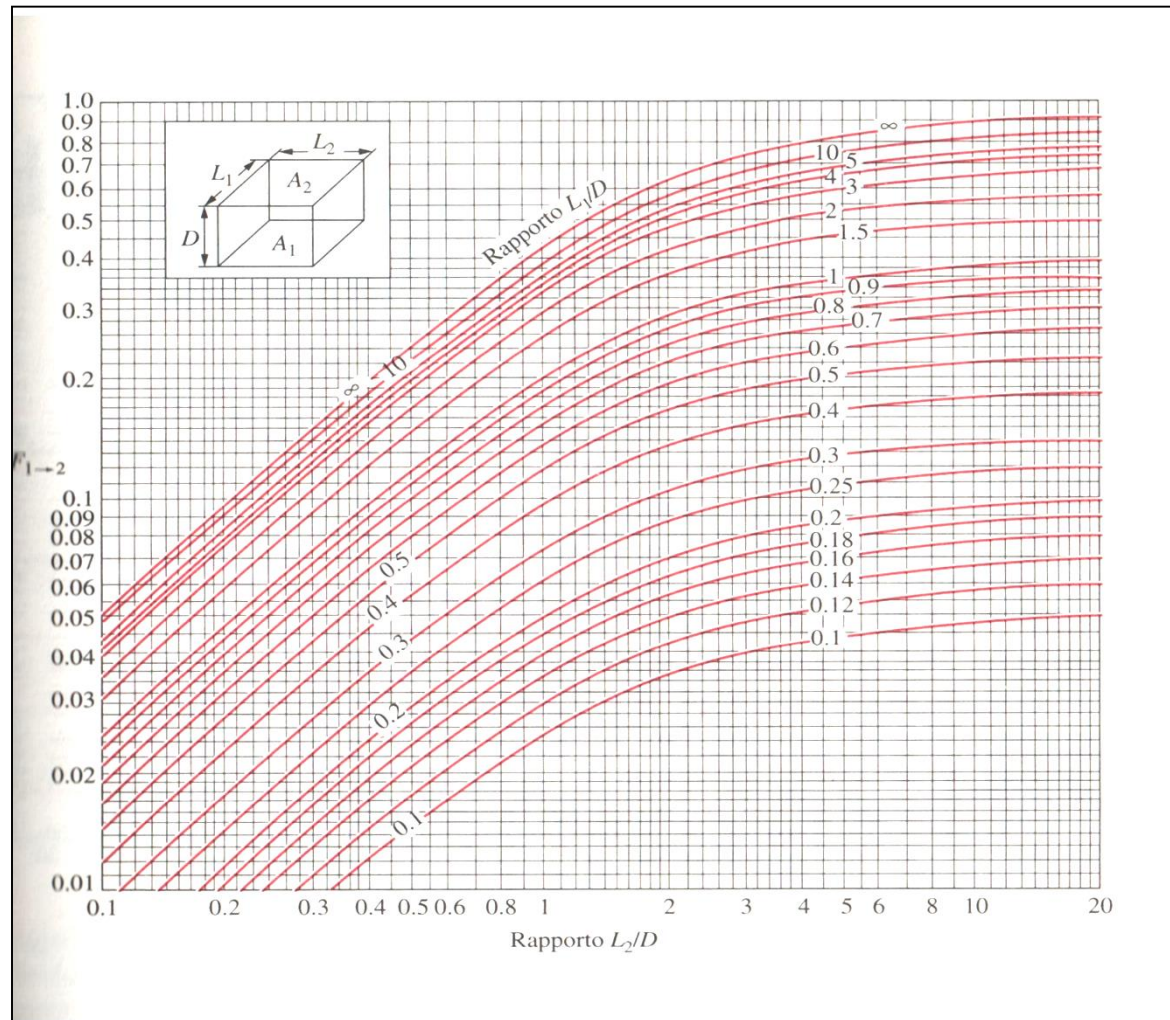
La frazione dell'energia radiante che lascia una superficie e viene intercettata da un'altra è detta **fattore di vista F_{ij}** : il primo pedice indica la superficie dalla quale la radiazione proviene, il secondo la superficie che la riceve.



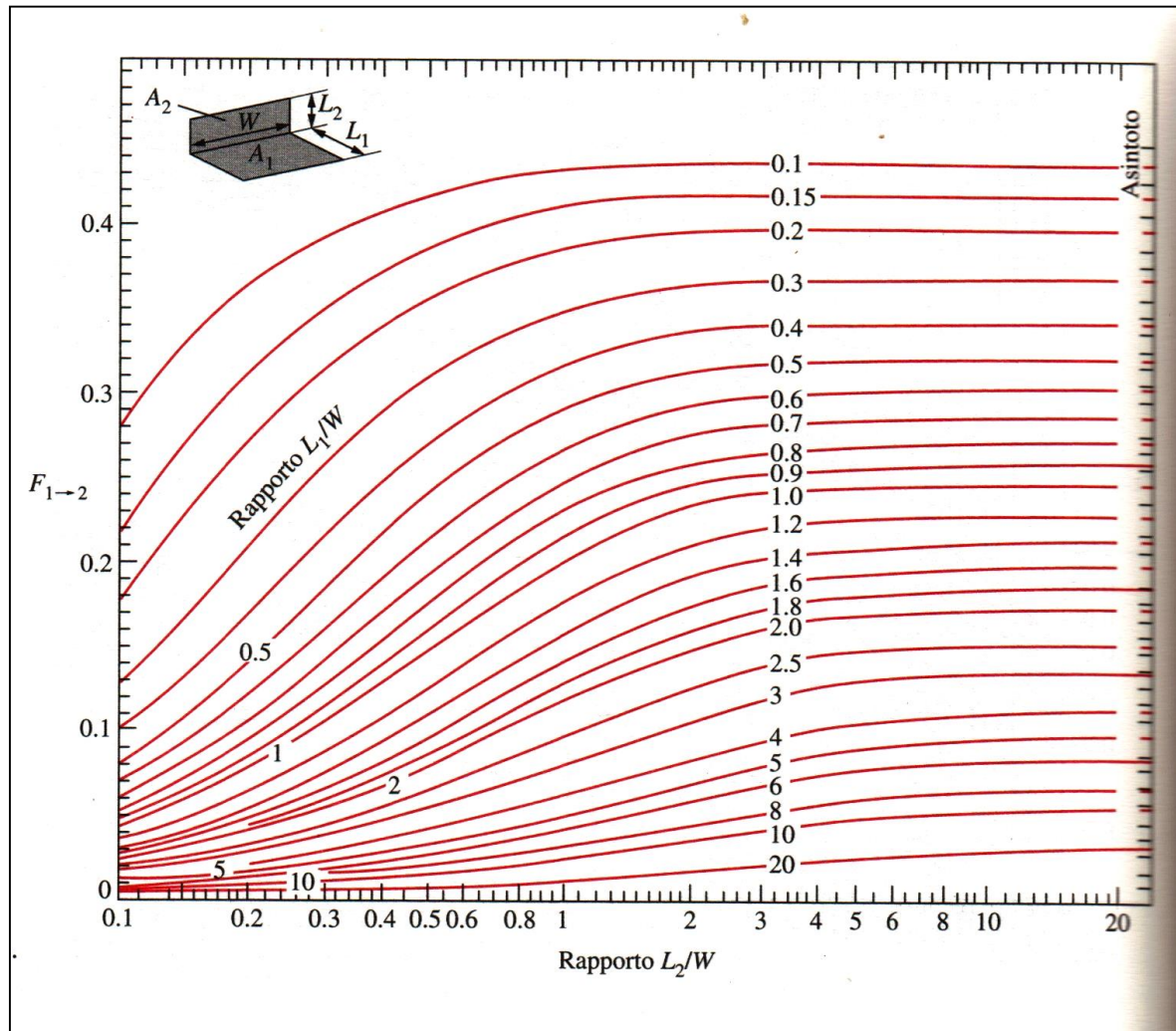
Esso dipende solo da fattori geometrici. Escluso alcuni casi particolarmente semplici, non è possibile eseguire la valutazione analitica dell'integrale che lo definisce; sono reperibili diagrammi o formulari e per i casi più complessi si ricorre al calcolo numerico.



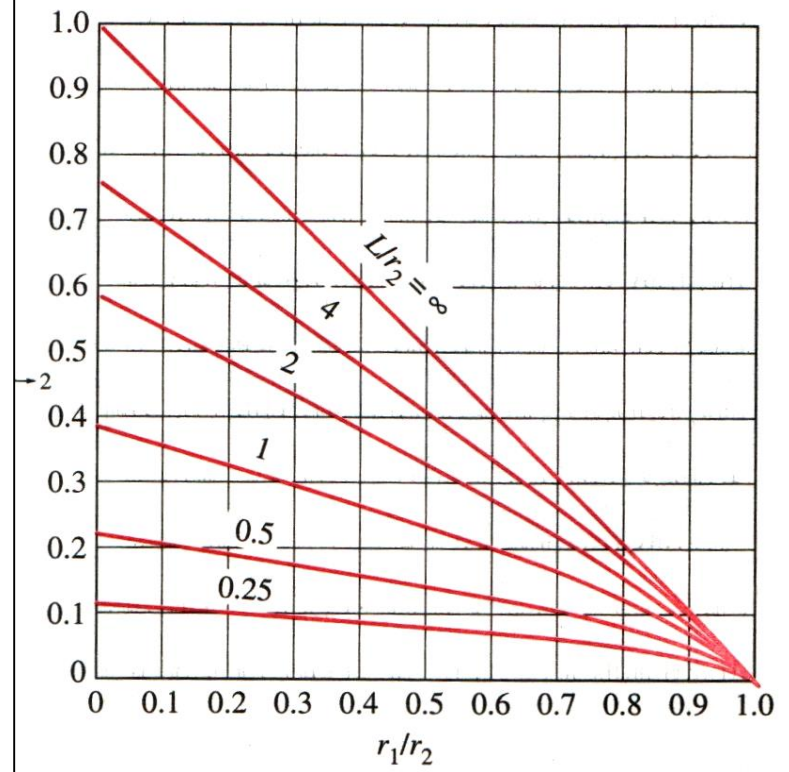
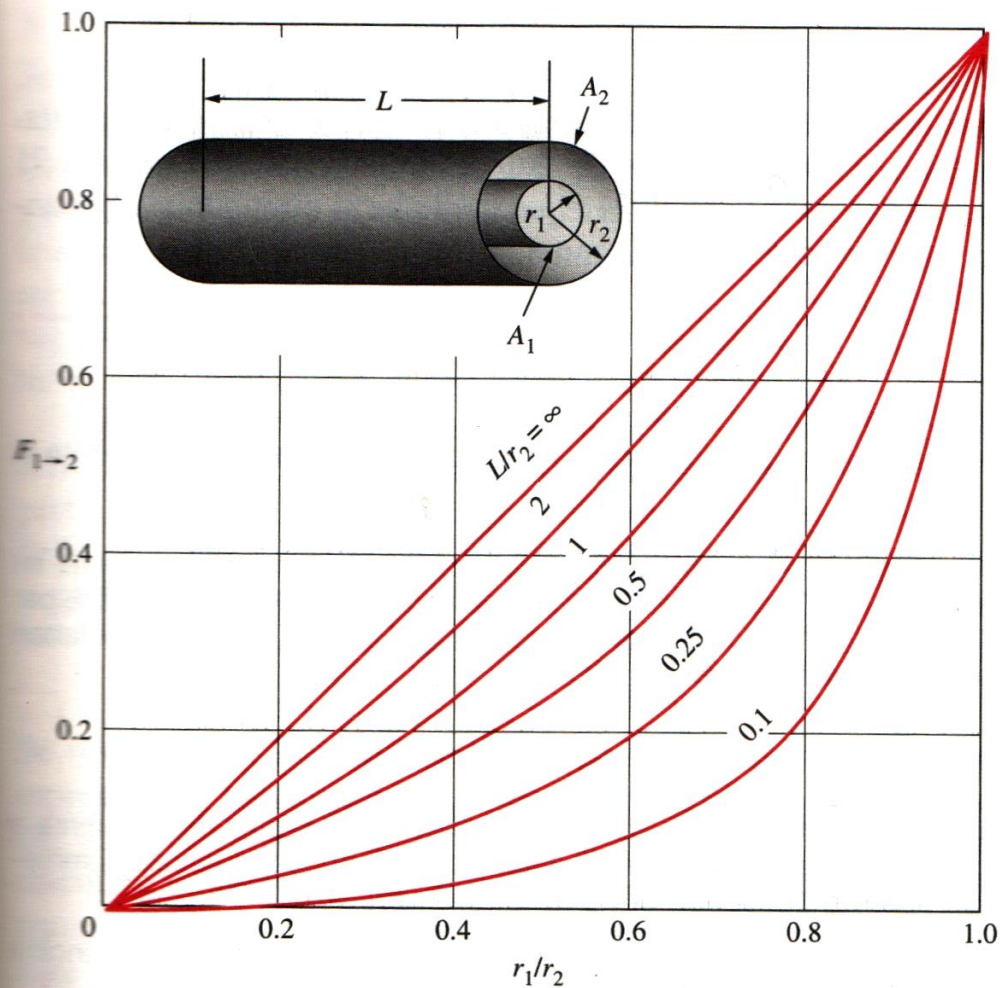
F_{ij} Piani paralleli



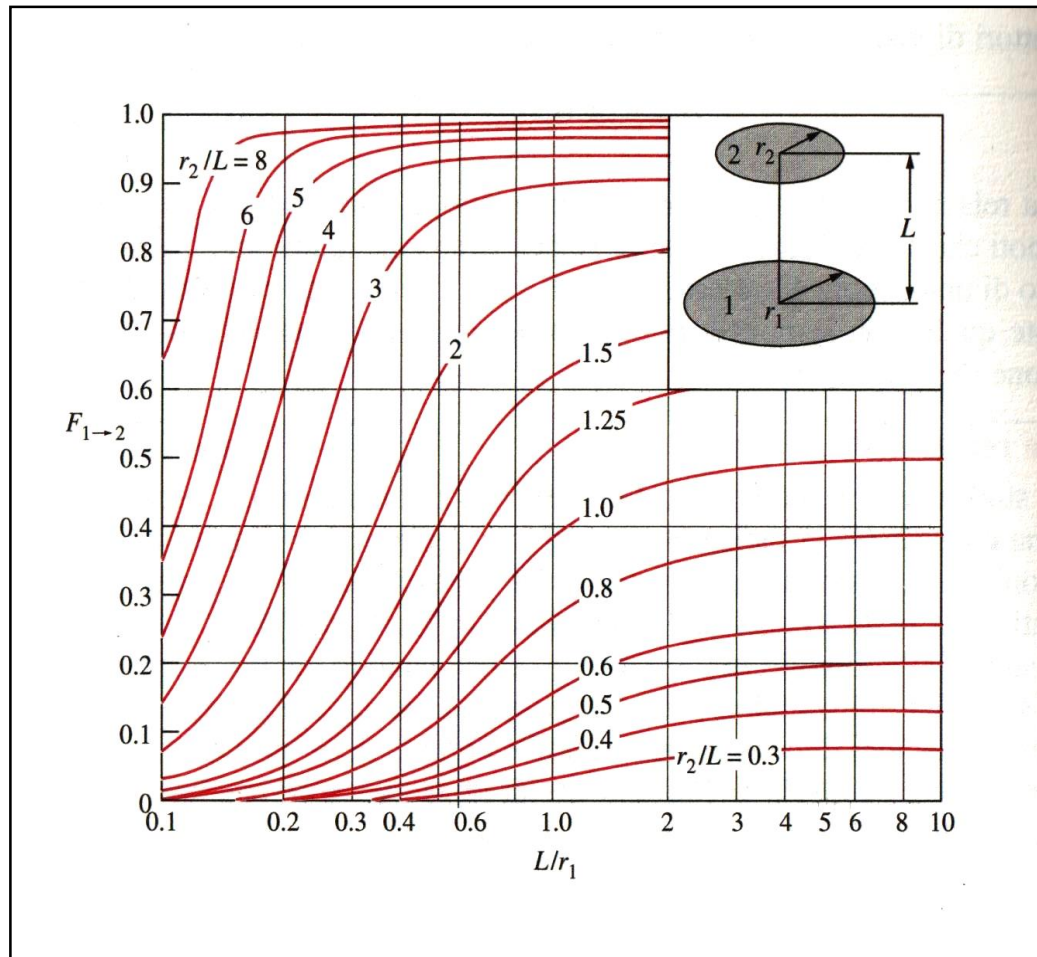
F_{ij} Piani perpendicolari



F_{ij} Cilindri concentrici



F_{ij} Dischi paralleli



Proprietà dei fattori di vista

$$q_{i \rightarrow j} = A_i F_{ij} q_i$$

$$q_{j \rightarrow i} = A_j F_{ji} q_j$$

$$q_{i \leftrightarrow j} = q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i} = A_i F_{ij} q_i - A_j F_{ji} q_j$$

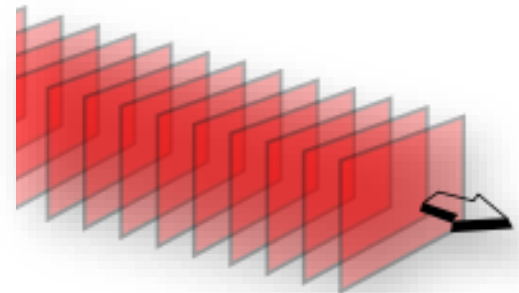
Se le due superfici sono alla stessa temperatura:

$$q_i = q_j$$

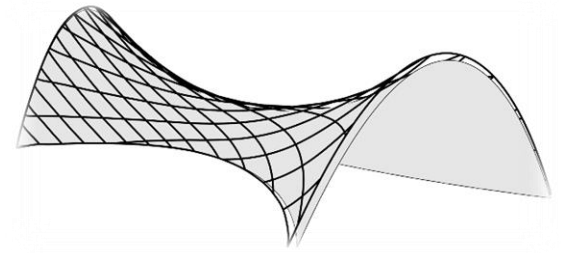
$$q_{i \leftrightarrow j} = A_i F_{ij} q_i - A_j F_{ji} q_j = q_i (A_i F_{ij} - A_j F_{ji}) = 0$$

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

RELAZIONE DI RECIPROCITÀ



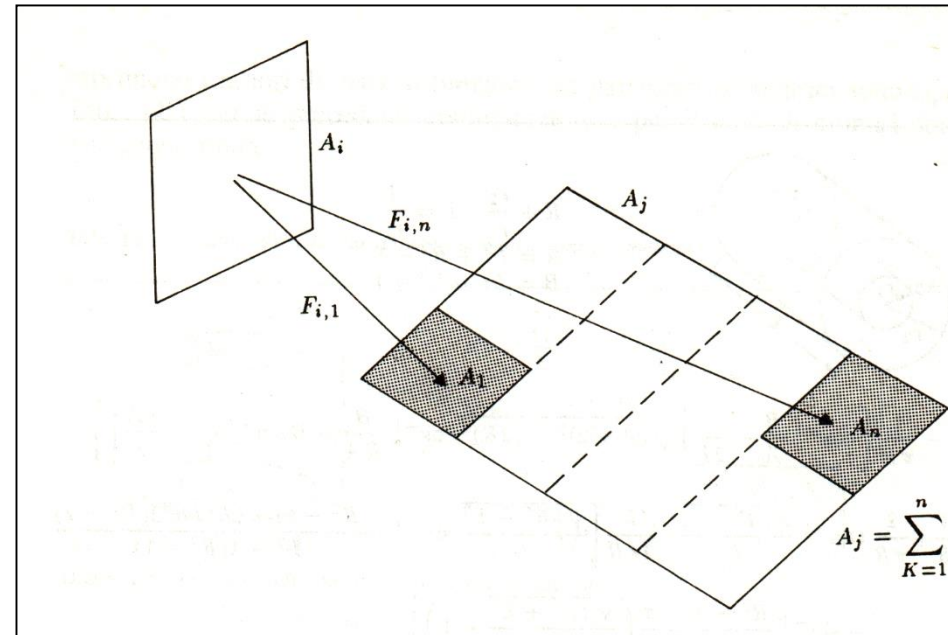
Proprietà additiva



Suddividendo la superficie A_j in parti di area A_k il fattore di vista F_{ij} della superficie A_i rispetto alla superficie composta A_j può ritenersi suddiviso in n componenti secondo l'espressione:

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n F_{ik}$$

La radiazione che raggiunge una superficie composta è la somma delle radiazioni che incidono sulle sue parti.



Relazioni di additività

Moltiplicando ambo i membri per A_j ed applicando ad entrambi la relazione di reciprocità:

$$A_i F_{ij} = A_i \sum_{k=1}^n F_{ik} = \sum_{k=1}^n A_i F_{ik} \quad \Rightarrow \quad A_j F_{ji} = \sum_{k=1}^n A_k F_{ki}$$

$$F_{ji} = \frac{\sum_{K=1}^n A_K F_{Ki}}{A_j}$$



- Se si suddivide la superficie ricevente, il fattore di vista è dato dalla somma algebrica dei fattori di vista relativi alle singole superfici riceventi
- se si suddivide la superficie emittente, il fattore di vista è dato dalla media pesata dei fattori di vista delle singole superfici emittenti.

Le due relazioni sono note come **RELAZIONI DI ADDITIVITA'**

Superfici emittente e ricevente composte

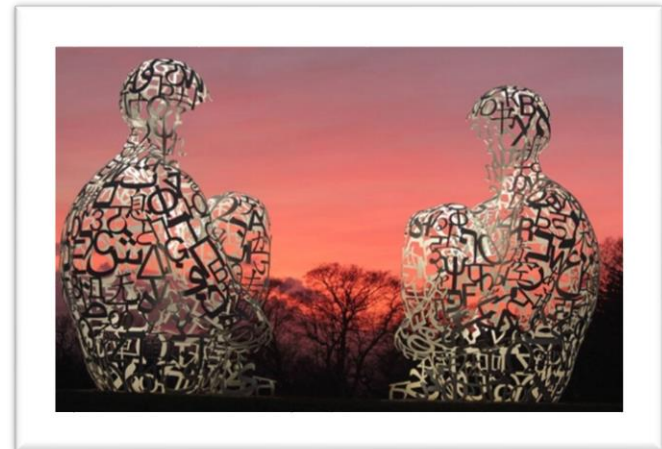
Se oltre alla superficie j si suddivide in m parti anche la superficie i :

$$A_i = \sum_{l=1}^m A_l$$

$$A_i F_{ij} = \sum_{l=1}^m A_l \sum_{k=1}^n F_{l,k}$$

Si ha:

$$F_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^m A_l \sum_{k=1}^n F_{l,k}}{A_i}$$



Proprietà di chiusura

Se più superfici, nel loro insieme, formano una superficie chiusa, per ogni superficie si otterrà:

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$$

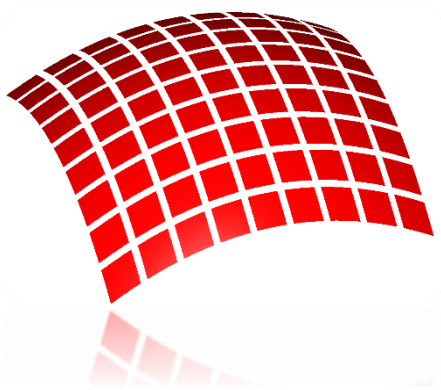
PROPRIETA' DI CHIUSURA

che esprime il principio di conservazione dell'energia, secondo cui l'energia totale radiante che lascia la superficie *i* è intercettata dalle *j* superfici della cavità.

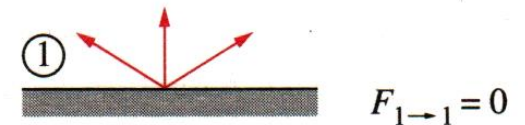
$$F_{ii}$$

$F_{ii} = 0$ per una superficie piana o convessa

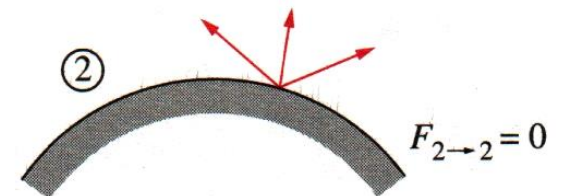
$F_{ii} \neq 0$ per una superficie concava



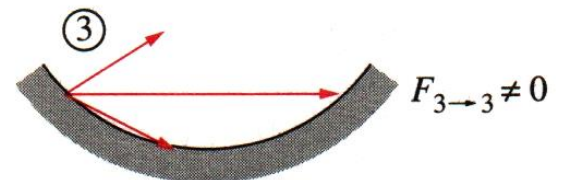
(a) Superficie piana



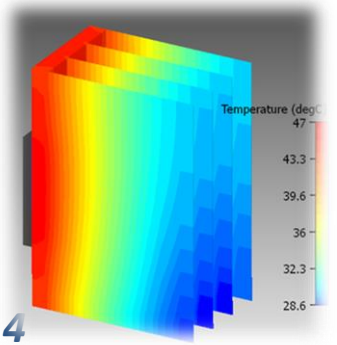
(b) Superficie convessa



(c) Superficie concava



Simbologia e pedici



q_{oi} flusso di energia emesso dalla superficie i : $A_i e_i \sigma T_i^4$

$q_{i \rightarrow}$ flusso di energia uscente dalla superficie i (per i corpi neri il flusso emesso coincide con quello uscente perché $r = 0$): $q_{oi} + r_i G$

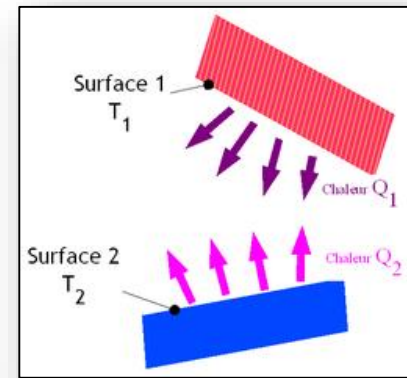
$q_{i \rightarrow j}$ flusso di energia uscente dalla superficie i che raggiunge la superficie j : $F_{ij} q_{i \rightarrow}$

q_i flusso netto di energia uscente dalla (o entrante nella) superficie i (flusso di energia uscente dalla superficie i meno flusso di energia entrante nella stessa superficie): $q_{i \rightarrow} - G$

$q_{i \leftrightarrow j}$ flusso di energia scambiato fra le superfici i e j (flusso di energia uscente dalla superficie i che raggiunge la superficie j meno flusso di energia uscente dalla superficie j che raggiunge la superficie i): $q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i}$

Esempio

Date due superfici, 1 (nera) e 2 (grigia) si ha:



a) flusso emesso q_{0i}

$$q_{01} = A_1 \sigma T_1^4$$

$$q_{02} = A_2 e_2 \sigma T_2^4$$

b) flusso uscente $q_{i \rightarrow}$

$$q_{1 \rightarrow} = q_{01}$$

$$q_{2 \rightarrow} = q_{02} + r_2 q_{1 \rightarrow 2}$$

c) flusso uscente da i
che raggiunge j $q_{i \rightarrow j}$

$$q_{1 \rightarrow 2} = F_{12} q_{01}$$

$$q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} q_{2 \rightarrow}$$

b) flusso netto q_i

$$q_1 = q_{1 \rightarrow} - q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_2 = q_{2 \rightarrow} - q_{1 \rightarrow 2}$$

c) flusso scambiato $q_{i \leftrightarrow j}$

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}$$

Superfici completamente affacciate

Superfici piane nere infinitamente estese (ipotesi tecnicamente accettabile se la distanza fra le superfici è molto piccola rispetto alla loro area) allo scopo di eliminare gli effetti di bordo; $A_1 = A_2$

$$F_{12} = F_{21} = 1$$

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$t_1 = t_2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$q_{01} = A_1 \sigma T_1^4$$

$$q_{02} = A_2 \sigma T_2^4$$

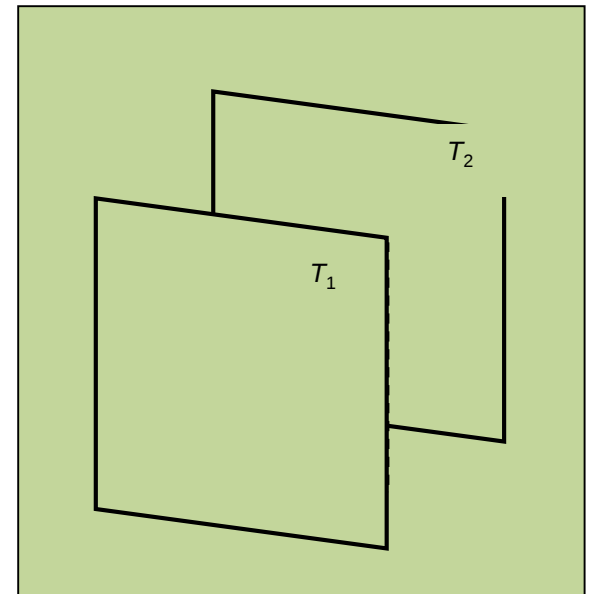
$$q_{1 \rightarrow 2} = F_{12} q_{01} = q_{01}$$

$$q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} q_{02} = q_{02}$$

$$q_1 = q_{01} - q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_2 = q_{02} - q_{1 \rightarrow 2}$$

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$



Schermi alla radiazione

Per minimizzare il calore scambiato si può introdurre tra le due superfici uno schermo costituito da un sottile foglio metallico, avente resistenza termica praticamente nulla, schematizzabile anch'esso come parete piana infinitamente estesa, a temperatura T_3 su entrambe le facce.

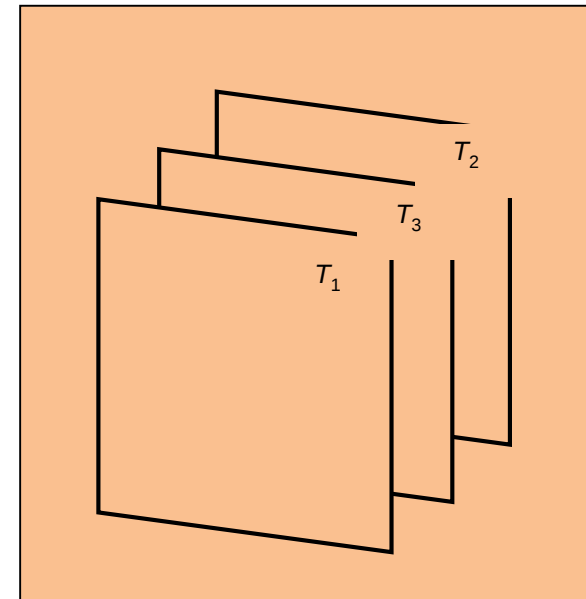
Schermo nero

$$q_{1\leftrightarrow 3} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_3^4)$$

$$q_{3\leftrightarrow 2} = A_3 \sigma (T_3^4 - T_2^4)$$

$$q_{1\leftrightarrow 3} = q_{3\leftrightarrow 2} \rightarrow A_1 \sigma (T_1^4 - T_3^4) = A_3 \sigma (T_3^4 - T_2^4) \rightarrow T_3^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

$$q_{1\leftrightarrow 3} = A_1 \sigma \left(T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right) = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{2} = \frac{q_{1\leftrightarrow 2}}{2}$$



$$q_{1\leftrightarrow n} = \frac{q_{1\leftrightarrow 2}}{n+1}$$

Superfici completamente affacciate

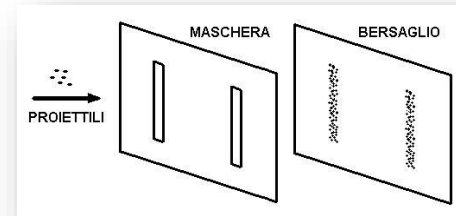
*Superfici piane, una grigia opaca (A_1) ed una nera (A_2),
 $A_1 = A_2$ infinitamente estese*

$$F_{12} = F_{21} = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$r_2 = 0$$

$$t_1 = t_2 = 0$$



$$q_{01} = A_1 e_1 \sigma T_1^4$$

$$q_{02} = A_2 \sigma T_2^4$$

$$q_{1 \rightarrow} = q_{01} + r_1 q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_{2 \rightarrow} = q_{02}$$

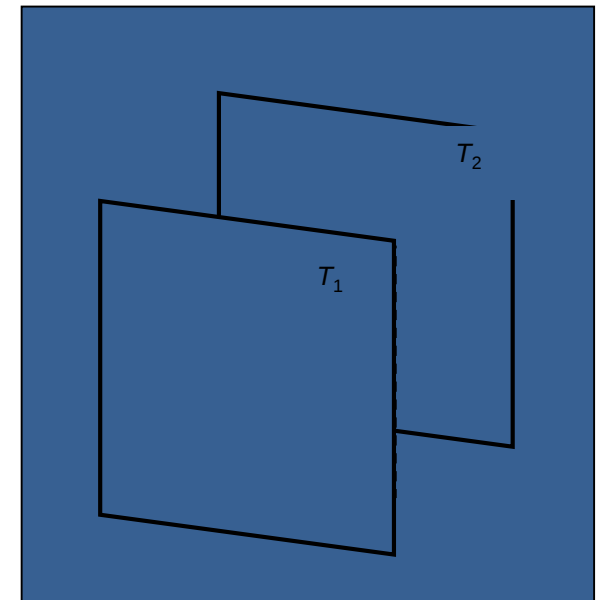
$$q_{1 \rightarrow 2} = F_{12} q_{1 \rightarrow} = q_{1 \rightarrow}$$

$$q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} q_{02} = q_{02}$$

$$q_1 = q_{1 \rightarrow} - q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_2 = q_{02} - q_{1 \rightarrow 2}$$

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}$$



Superfici sferiche

Superfici nere

$$A_1 \neq A_2 \quad F_{12} = 1 \quad F_{21} \neq 1$$

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$t_1 = t_2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$q_{01} = A_1 \sigma T_1^4$$

$$q_{02} = A_2 \sigma T_2^4$$

$$q_{1 \rightarrow 2} = F_{12} q_{01} = q_{01}$$

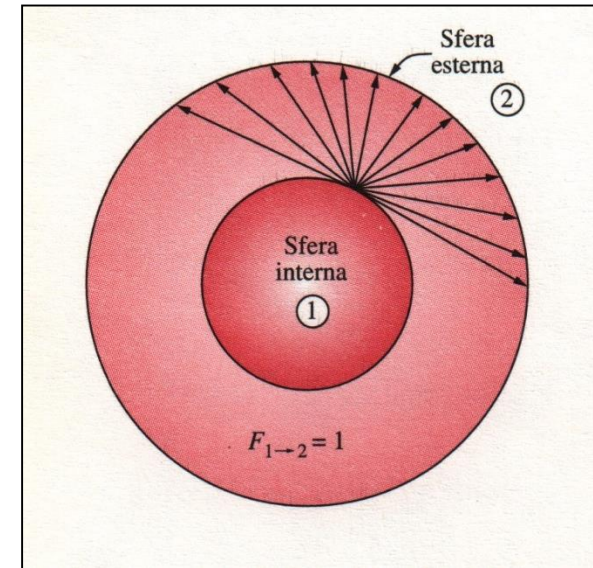
$$q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} q_{02}$$

$$q_{2 \rightarrow 2} = F_{22} q_{02}$$

$$q_1 = q_{01} - q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_2 = q_{02} - q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 2}$$

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}$$



Superfici sferiche

Superfici interna grigia opaca (A_1) ed esterna nera (A_2)

$$A_1 \neq A_2 \quad F_{12} = 1 \quad F_{21} \neq 1$$

$$a_2 = 1$$

$$t_1 = t_2 = 0$$

$$r_2 = 0$$

$$q_{01} = A_1 e_1 \sigma T_1^4$$

$$q_{02} = A_2 \sigma T_2^4$$

$$q_{1 \rightarrow} = q_{01} + r_1 q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_{2 \rightarrow} = q_{02}$$

$$q_{1 \rightarrow 2} = F_{12} q_{1 \rightarrow} = q_{1 \rightarrow}$$

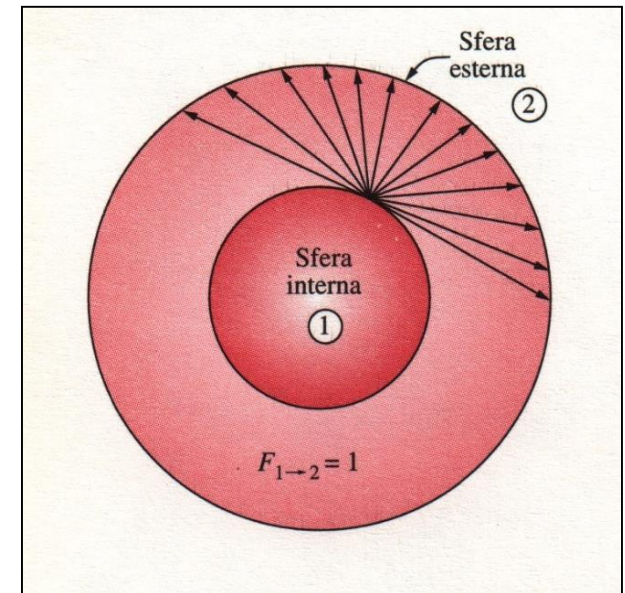
$$q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} q_{02}$$

$$q_{2 \rightarrow 2} = F_{22} q_{02}$$

$$q_1 = q_{1 \rightarrow} - q_{2 \rightarrow 1}$$

$$q_2 = q_{2 \rightarrow} - q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 2}$$

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}$$



Contemporanea presenza di scambio per convezione ed irraggiamento

Attraverso la superficie delimitante un corpo solido da un fluido circostante ha luogo un flusso di calore per convezione; inoltre la superficie emette energia radiante e ne riceve da parte di altri corpi eventualmente presenti nel fluido

$$Q = hA(T_s - T_f) + \sigma AF_{si}(T_s^4 - T_i^4)$$

T_s : temperatura della superficie del corpo

T_f : temperatura del fluido

T_i : temperatura dell'i-esimo corpo presente nel fluido



Coefficiente di adduzione



Se $T_i = T_f$

$$T_s^4 - T_f^4 = (T_s^2 + T_f^2)(T_s^2 - T_f^2) = (T_s^2 + T_f^2)(T_s - T_f)(T_s + T_f)$$

$$Q = [h + F_{si} \sigma (T_s^2 + T_f^2)(T_s + T_f)](T_s - T_f) A$$

Coefficiente di trasmissione del calore per irraggiamento:

$$h_r = F_{si} \sigma (T_s^2 + T_f^2)(T_s + T_f)$$

COEFFICIENTE DI ADDUZIONE: $\alpha = h + h_r \Rightarrow Q = \alpha A (T_s - T_f)$

α può essere usato anche nel coefficiente globale U

Temperatura aria-sole

Se non è possibile confondere la temperatura dei corpi posti nel fluido con quella del fluido stesso si ricorre alla definizione di una temperatura fittizia del fluido, tale da dare per sola convezione lo stesso scambio termico di calore che si ha in realtà per convezione ed irraggiamento: questo artificio è utilizzato in particolare nel campo del condizionamento dell'aria, per valutare il calore scambiato dalle diverse superfici esterne delle costruzioni con l'aria ed il Sole.



Esercizio 1

Determinare il potere emissivo monocromatico a $2,30 \mu\text{m}$ di un corpo nero che si trova alla temperatura di 1645 K .

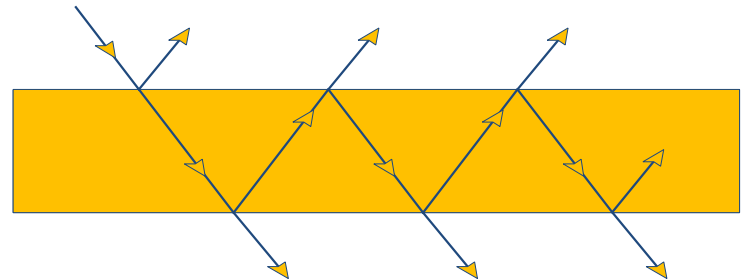
$$E_n(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} = \frac{3,742 \cdot 10^8 \frac{\text{W} \mu\text{m}^4}{\text{m}^2}}{(2,30 \mu\text{m})^5 \left(e^{\frac{14378 \mu\text{mK}}{2,30 \mu\text{m} \cdot 1645 \text{K}}} - 1 \right)} = 133 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \mu\text{m}}$$



Esercizio 2

L'energia radiante totale che colpisce un corpo che riflette, assorbe e trasmette è pari a 2200 W/m^2 . Di questa quantità 450 W/m^2 vengono riflessi e 900 W/m^2 assorbiti. Determinare la trasmissività del corpo.

$$t = 1 - r - a = 1 - \frac{G_r}{G} - \frac{G_a}{G} = 1 - \frac{450 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{2200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} - \frac{900 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{2200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 0,39$$



Esercizio 3

Determinare, per un corpo nero mantenuto a 115°C, il massimo potere emissivo monocromatico, la lunghezza d'onda corrispondente ed il potere emissivo totale.

$$E_n(\lambda_{\max}, T) = \frac{C_1}{\lambda_{\max}^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda_{\max} T}} - 1 \right)} =$$

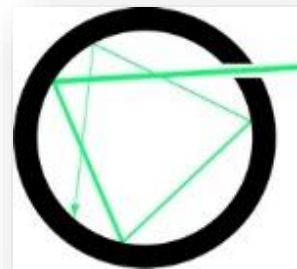
essendo:

$$\lambda_{\max} = \frac{2897,6 \mu m K}{388 K} = 7,47 \mu m$$

$$= \frac{3,742 \cdot 10^8 \frac{W \mu m^4}{m^2}}{(7,47 \mu m)^5 \left(e^{\frac{14390 \mu m K}{2897,6 \mu m K}} - 1 \right)} = 113,4 \frac{W}{m^2 \mu m}$$

$$\frac{q_o}{A} = \sigma T^4 =$$

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} (388 K)^4 = 1285 \frac{W}{m^2}$$



Esercizio 4

Determinare i fattori di vista F_{13} ed F_{31} .

$$F_{1-(2,3)} = F_{12} + F_{13} \Rightarrow F_{13} = F_{1-(2,3)} - F_{12}$$

$$F_{1-23}: \quad \beta = \frac{b}{c} = \frac{3m}{5m} = 0,6$$

$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{2m}{5m} = 0,4$$

$$\Rightarrow F_{1-(2,3)} = 0,19$$

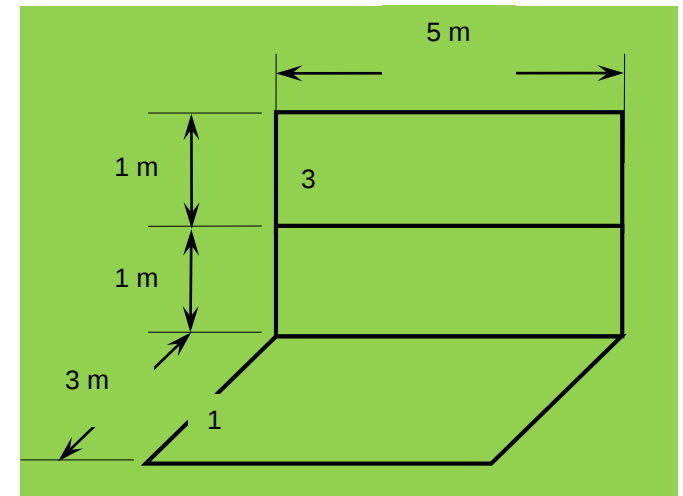
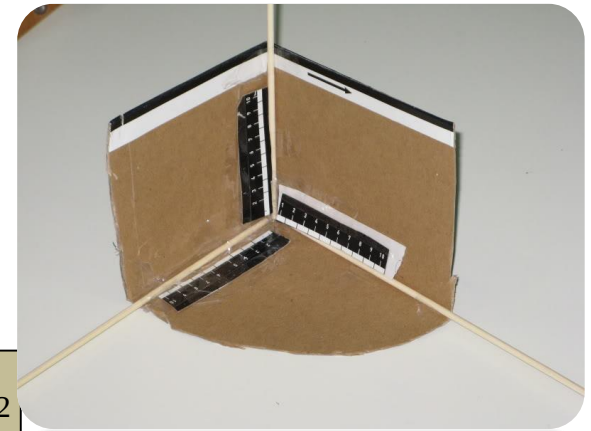
$$F_{12}: \quad \beta = \frac{b}{c} = \frac{3m}{5m} = 0,6$$

$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{1m}{5m} = 0,2$$

$$\Rightarrow F_{12} = 0,125$$

$$F_{13} = F_{1-(2,3)} - F_{12} = 0,19 - 0,125 = 0,065$$

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} = \frac{15m^2 \cdot 0,065}{5m^2} = 0,195$$

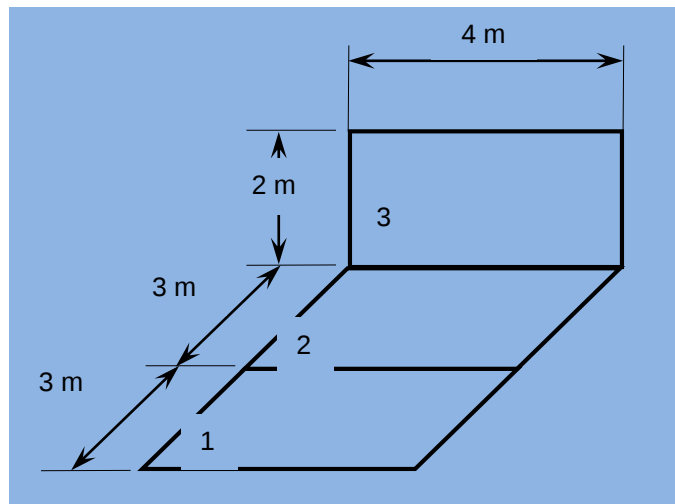


Esercizio 5

Determinare il fattore di vista F_{13} , sapendo che $F_{(1,2)-3}$ e F_{23} valgono rispettivamente 0,042 e 0,055.

$$(A_1 + A_2)F_{(1,2)-3} = A_1F_{13} + A_2F_{23}$$

$$F_{13} = \frac{A_1 + A_2}{A_1} F_{(1,2)-3} - \frac{A_2}{A_1} F_{23} = \frac{(12 + 12)m^2}{12m^2} \cdot 0,042 - \frac{12m^2}{12m^2} \cdot 0,055 = 0,029$$



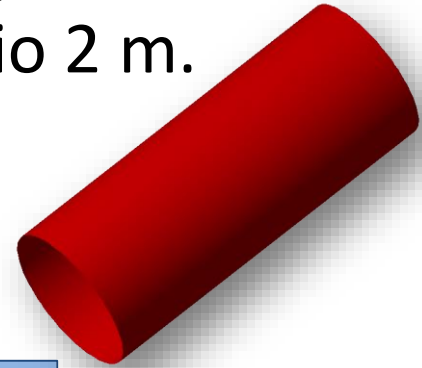
Esercizio 6

Ricavare i fattori di vista F_{13} , F_{31} ed F_{33} per un contenitore cilindrico cavo alto 2 m e di raggio 2 m.

$$\beta = \frac{r_2}{L} = \frac{2m}{2m} = 1$$

$$\gamma = \frac{L}{r_1} = \frac{2m}{2m} = 1$$

$$F_{12} = F_{21} = 0,39$$



$$F_{12} + F_{13} = 1$$



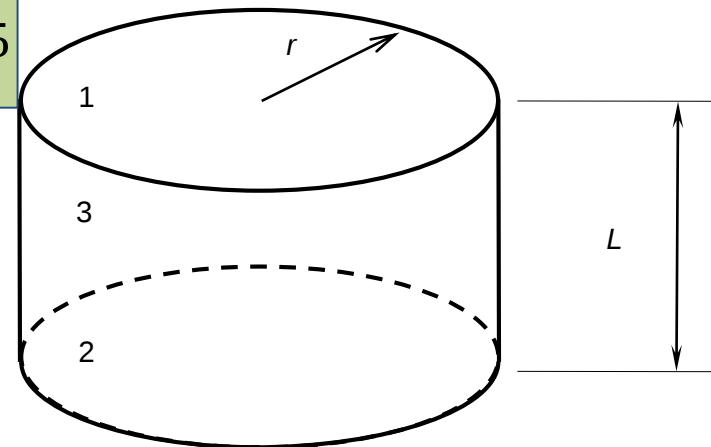
$$F_{13} = 1 - F_{12} = 1 - 0,39 = 0,61$$

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} = \frac{\pi r^2}{2\pi r L} F_{13} = \frac{r}{2L} F_{13} = \frac{2m}{2 \cdot 2m} \cdot 0,61 = 0,305$$

$$2F_{31} + F_{33} = 1$$

$$F_{33} = 1 - 2F_{31} =$$

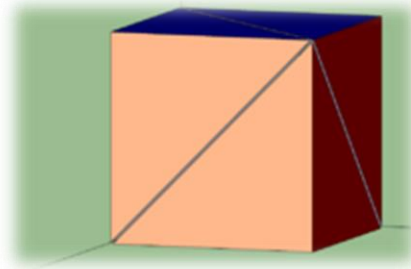
$$1 - 0,61 = 0,39$$



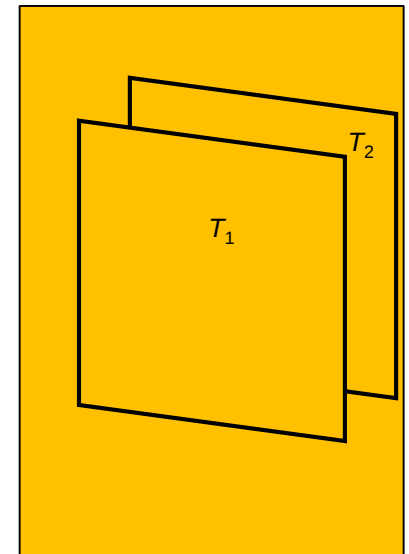
Esercizio 7

Due piani neri paralleli, infinitamente estesi, sono mantenuti rispettivamente a 300°C e 200°C. Determinare il flusso termico unitario scambiato.

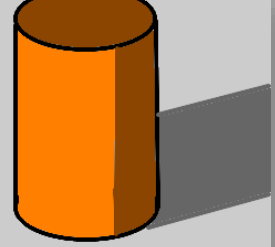
$$F_{12} = F_{21} = 1$$



$$\begin{aligned} q_{1 \leftrightarrow 2} &= q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = F_{12} q_{01} - F_{21} q_{02} = \sigma T_1^4 - \sigma T_2^4 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) = \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \left[(573\text{K})^4 - (473\text{K})^4 \right] = 3276,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$



Esercizio 8



Per un cilindro lungo 2 m, con raggio esterno 2 m ed interno 1 m, si ricavano i fattori di vista F_{13} , F_{23} , F_{31} , F_{32} e F_{33} tra le due superfici anulari che chiudono i cilindri alle due estremità.

$$\beta = \frac{L}{r_1} = \frac{2m}{1m} = 2$$

$$\gamma = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2m}{1m} = 2$$

$$F_{21} = 0,33$$

$$F_{22} = 0,23$$

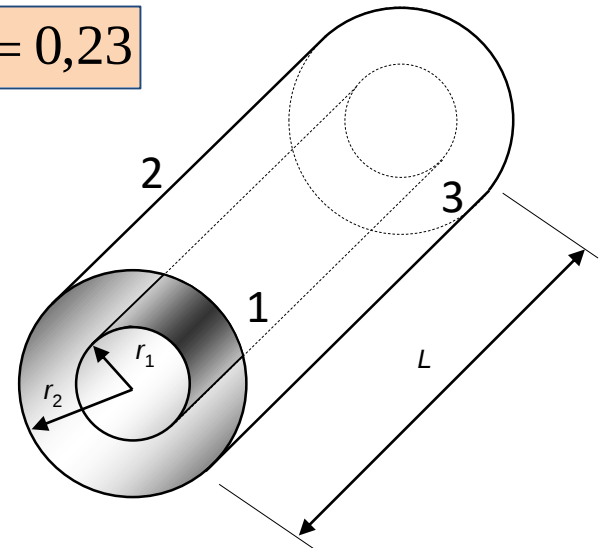
$$F_{11} + F_{12} + 2F_{13} = 1$$



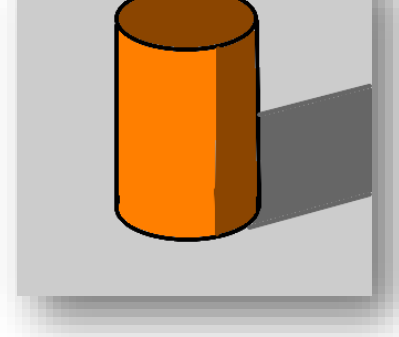
$$F_{13} = \frac{1}{2}(1 - F_{12})$$

$$F_{12} = \frac{A_2}{A_1} F_{21} = \frac{2\pi r_2 L}{2\pi r_1 L} F_{21} = \frac{r_2}{r_1} F_{21} = \frac{2m}{1m} \cdot 0,33 = 0,66$$

$$F_{13} = \frac{1}{2}(1 - F_{12}) = \frac{1}{2}(1 - 0,66) = 0,165$$



Esercizio 8



$$F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} = \frac{2\pi r_1 L}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} F_{13} = \frac{r_1 L}{r_2^2 - r_1^2} F_{13} = \frac{1m \cdot 2m}{4m^2 - 1m^2} \cdot 0,17 = 0,13$$

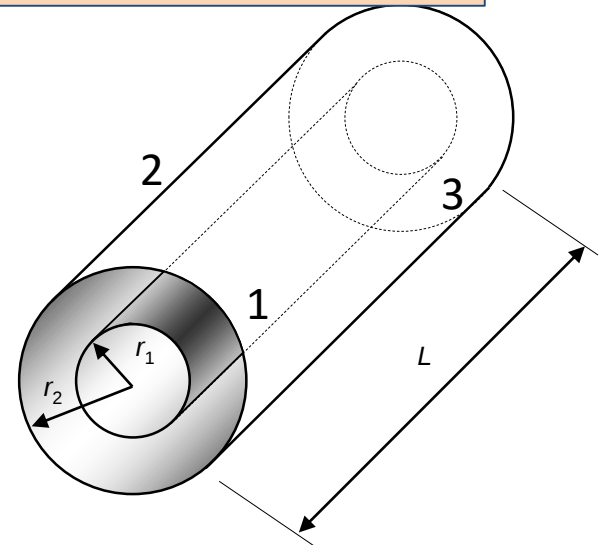
$$F_{21} + F_{22} + 2F_{23} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \frac{1}{2}(1 - F_{21} - F_{22}) = \frac{1}{2}(1 - 0,33 - 0,23) = 0,22$$

$$F_{32} = \frac{A_2}{A_3} F_{23} =$$

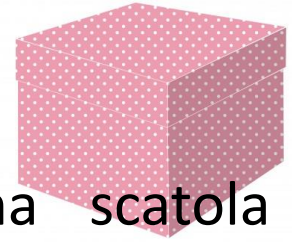
$$\frac{r_2 L}{r_2^2 - r_1^2} F_{23} = \frac{1m \cdot 2m}{3m^2} \cdot 0,22 = 0,15$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$F_{33} = 1 - F_{31} - F_{32} = 1 - 0,13 - 0,15 = 0,72$$



Esercizio 9



Una superficie nera chiusa ha la forma di una scatola parallelepipedica alta 3 m, larga 2,4 m e profonda 3 m. La superficie di base si trova a 450 K, quella superiore a 530 K, ed ogni parete laterale a 480 K. Determinare i flussi termici scambiati dalla superficie di base con le altre superfici.

$$q_{2 \leftrightarrow 1} = q_{2 \rightarrow 1} - q_{1 \rightarrow 2} = F_{21}q_{02} - F_{12}q_{01} = A_2 F_{21} \sigma T_2^4 - A_1 F_{12} \sigma T_1^4 = A_2 F_{21} \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$q_{2 \leftrightarrow 3} = q_{2 \rightarrow 3} - q_{3 \rightarrow 2} = F_{23}q_{02} - F_{32}q_{03} = A_2 F_{23} \sigma T_2^4 - A_3 F_{32} \sigma T_3^4 = A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_3^4)$$

$$\beta = \frac{b}{c} = \frac{3m}{3m} = 1$$

$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{2,4m}{3m} = 0,8$$

$$F_{21} = 0,175$$

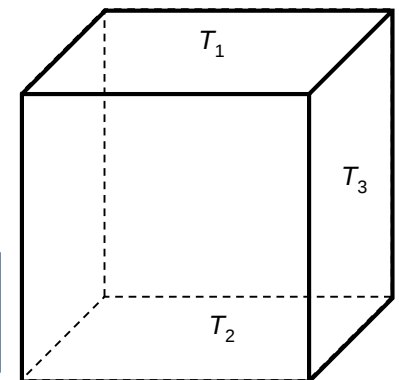
$$\beta = \frac{b}{c} = \frac{3m}{2,4m} = 1,25$$

$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{3m}{2,4m} = 1,25$$

$$F_{23} = 0,18$$

$$q_{2 \leftrightarrow 1} = (2,4m \cdot 3m) \cdot 0,175 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot [(450K)^4 - (530K)^4] = -2607,6W$$

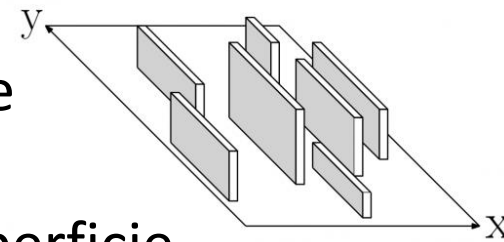
$$q_{2 \leftrightarrow 3} = (2,4m \cdot 3m) \cdot 0,18 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot [(450K)^4 - (480K)^4] = -888W$$



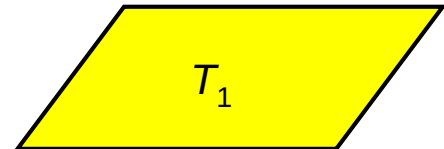
Esercizio 10

Due rettangoli uguali (0,6 m x 1,2 m) e paralleli, distano 1,2 m. Il rettangolo superiore è nero e si trova alla temperatura di 500 K, quello inferiore è grigio, opaco, ha emissività pari a 0,2 e si trova alla temperatura di 900 K, determinare:

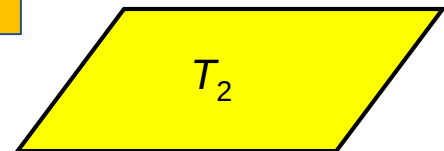
- 1) il flusso di energia emesso da ciascuna superficie
- 2) il flusso di energia uscente dalla superficie grigia
- 3) il flusso netto di energia uscente da ciascuna superficie
- 4) il flusso di energia scambiato tra le due superfici.



$$q_{01} = A_1 \sigma T_1^4 = (0,6\text{m} \cdot 1,2\text{m}) \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (500\text{K})^4 = 2551,5\text{W}$$



$$q_{02} = A_2 e_2 \sigma T_2^4 = (0,6\text{m} \cdot 1,2\text{m}) \cdot 0,2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (900\text{K})^4 = 53568\text{W}$$



$$q_{2 \rightarrow} = q_{02} + r_2 q_{1 \rightarrow 2} = q_{02} + r_2 F_{12} q_{01} = q_{02} + (1 - e_2) F_{12} q_{01}$$

Esercizio 10

$$\beta = \frac{b}{c} = \frac{0,6m}{1,2m} = 0,5$$

$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{1,2m}{1,2m} = 1$$

$$F_{12} = 0,12$$

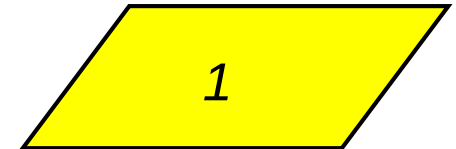


$$q_{2 \rightarrow} = q_{02} + (1 - e_2) F_{12} q_{01} = 53568W + 0,8 \cdot 0,12 \cdot 2551,5W = 53323W$$

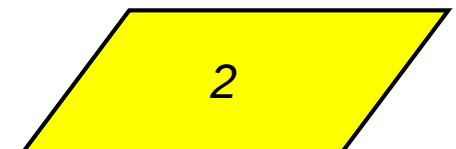
$$F_{21} = F_{12}$$

$$q_1 = q_{01} - q_{2 \rightarrow 1} = q_{01} - F_{21} q_{2 \rightarrow} = 2551,5W - 0,12 \cdot 53323W = -3847,3W$$

$$q_2 = q_{2 \rightarrow} - q_{1 \rightarrow 2} = q_{2 \rightarrow} - F_{12} q_{01} = 5111,7W - 0,12 \cdot 425,22W = 5060,5W$$



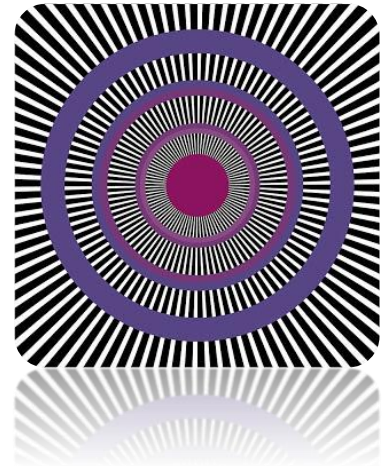
$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = F_{12} q_{01} - F_{21} q_{2 \rightarrow} = F_{12} (q_{01} - q_{2 \rightarrow}) = 0,12 (2551,5 - 53323)W = -6092,0W$$



Esercizio 11

Date due sfere concentriche, di cui l'interna è grigia e l'esterna nera, determinare:

- 1) il flusso emesso dalle due superfici
- 2) il flusso uscente dalla superficie interna
- 3) il flusso netto uscente da ciascuna superficie;
- 4) il flusso scambiato fra le due superfici.



$$F_{12} = 1$$

$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$q_{01} = A_1 \sigma T_1^4$$

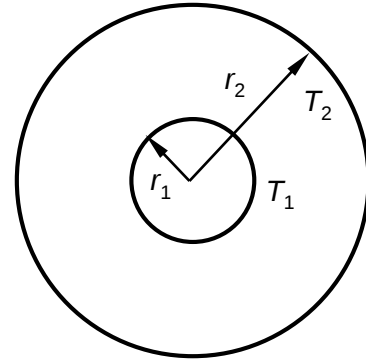
$$q_{02} = A_2 \sigma T_2^4$$

$$q_{1 \rightarrow} = q_{01} + r_1 q_{2 \rightarrow 1} = q_{01} + r_1 F_{21} q_{02}$$

$$q_1 = q_{1 \rightarrow} - q_{2 \rightarrow 1} = q_{1 \rightarrow} - F_{21} q_{02}$$

$$q_2 = q_{02} - q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 2} = q_{02} - F_{12} q_{1 \rightarrow} - F_{22} q_{2 \rightarrow}$$

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1}$$



Esercizio 12

Calcolare i flussi termici netti uscenti dalla superficie esterna del cilindro interno e da quella interna del cilindro esterno.



$$F_{12} = 1$$

$$q_1 = q_{01} - q_{2 \rightarrow 1} - 2q_{3 \rightarrow 1} = q_{01} - F_{21}q_{02} - 2F_{31}q_{03} = A_1\sigma T_1^4 - A_2F_{21}\sigma T_2^4 - 2A_3F_{31}\sigma T_3^4 =$$

$$= A_1\sigma T_1^4 - A_1F_{12}\sigma T_2^4 - 2A_1F_{13}\sigma T_3^4$$

$$q_2 = q_{02} - q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 2} - 2q_{3 \rightarrow 2} = q_{02} - F_{12}q_{01} - F_{22}q_{02} - 2F_{32}q_{03} =$$

$$= (1 - F_{22})A_2\sigma T_2^4 - A_1F_{12}\sigma T_1^4 - 2A_3F_{32}\sigma T_3^4$$

