

TRASMISSIONE DEL CALORE

Si distinguono in genere tre differenti modalità di trasmissione del calore: **conduzione**, **convezione**, **irraggiamento**.

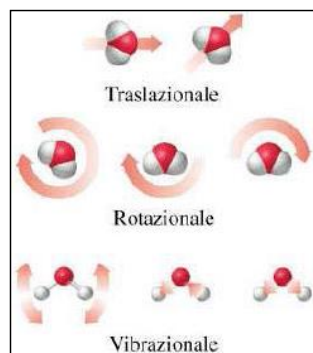
A rigore, solo la conduzione e l'irraggiamento dovrebbero essere classificati come processi di **scambio termico** poiché, essendo questo definito come la trasmissione di energia da una regione ad un'altra dovuta ad una differenza di temperatura, solo questi due meccanismi dipendono dalla semplice esistenza di una differenza di temperatura; la convezione infatti dipende anche dal trasporto di materia. Tuttavia, poiché la convezione comporta anche la trasmissione di energia da regioni a temperatura superiore verso regioni a temperatura inferiore, è invalso l'uso dell'espressione *scambio di calore per convezione*.

Energia termica

Non si può parlare di contenuto di calore di un corpo, essendo esso energia in transito (energia termica), riconoscibile solo quando attraversa il contorno di un sistema.

La spiegazione fisica della natura del calore si è avuta alla metà del XIX secolo con lo sviluppo della *teoria cinetica molecolare*, che descrive la materia come un gran numero di piccole particelle (atomi o molecole) dotate di diverso comportamento nei vari stati di aggregazione. Esse nei solidi non si muovono, ma oscillano e vibrano intorno a posizioni fisse ben precise, nei liquidi sono a contatto ed hanno maggiore libertà di movimento, nei gas, infine, hanno massima libertà di movimento e sono in costante movimento casuale, con moto totalmente disordinato.

Le particelle durante il loro moto possono traslare con una certa velocità, vibrare l'una relativamente all'altra o ruotare attorno ad un asse. A questi moti sono associate le energie cinetiche di traslazione, vibrazione e rotazione, la cui somma costituisce l'energia cinetica di una molecola.

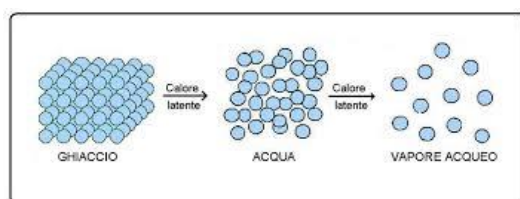


La somma delle energie cinetica e potenziale di tutte le molecole che costituiscono il sistema rappresenta la sua **energia interna**, somma di tutte le forme microscopiche di energia.

Essa è legata alla struttura molecolare ed al grado di attività delle molecole e poiché sia quest'ultimo che la loro velocità media sono proporzionali alla temperatura, ne consegue che al suo crescere aumenta l'energia cinetica delle molecole e quindi l'energia interna.

In seguito all'emanazione di tale teoria il calore fu quindi correttamente interpretato come energia associata al moto delle particelle e quindi all'energia interna di un corpo. In particolare viene chiamata energia termica la componente dell'energia interna di un sistema la cui variazione è proporzionale alla variazione di temperatura.

Un'altra componente dell'energia interna è infatti legata alle forze intermolecolari, ovvero alle forze che legano tra loro le molecole di un sistema ed una terza componente è legata ai legami atomici all'interno di una molecola. In particolare le forze intermolecolari sono più intense nei solidi e più deboli nei gas, avendo questi ultimi ricevuto una quantità di energia che ne ha rotto il legame tra le molecole, determinandone il passaggio alla fase gassosa (cambiamento di fase), per cui un sistema in fase gassosa si trova ad un livello di energia interna più elevato rispetto al corrispondente livello in fase solida o liquida.



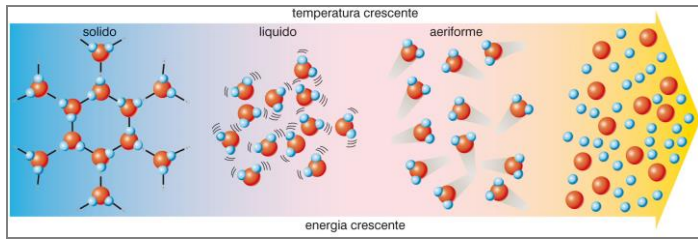
Conduzione

La conduzione è un processo mediante il quale l'energia termica si trasmette per contatto diretto tra le molecole senza che si spostino sensibilmente. Essa si verifica per effetto dell'interazione delle particelle di una sostanza dotate di maggiore energia con quelle adiacenti dotate di minore energia.

Lo scambio di energia per conduzione può avvenire nei solidi, nei liquidi e nei gas, ma è il solo meccanismo secondo cui il calore può propagarsi nei solidi opachi. Essa è anche importante nei fluidi, ma nei mezzi non solidi è di solito associata alla convezione ed all'irraggiamento.

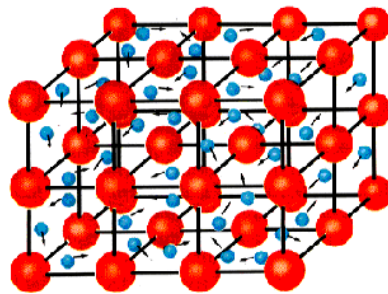
Ha una base teorica fondata sulla teoria cinetica molecolare, secondo la quale la temperatura di un elemento materiale è proporzionale all'energia cinetica media delle particelle che lo costituiscono e poiché l'energia interna è l'energia posseduta da un elemento materiale in virtù della velocità e della posizione relativa delle molecole: ne risulta che quanto più velocemente si muovono le sue molecole, tanto maggiori sono la temperatura e l'energia interna in un elemento di materia.

Quando le molecole di una regione acquistano un'energia cinetica media maggiore di quella delle molecole di una regione adiacente, come peraltro indicato da una differenza di temperatura, le molecole aventi maggiore energia cedono parte di questa alle molecole della regione a temperatura minore.



Lo scambio di energia può avvenire per urto elastico tra le molecole (nei fluidi) o per diffusione degli elettroni più veloci da regioni a temperatura maggiore verso regioni a temperatura minore (nei metalli); nei solidi non metallici è invece dovuto alle vibrazioni delle molecole all'interno del reticolo.

Più in generale, nei solidi la trasmissione del calore è dovuta alla somma di due componenti: gli effetti delle onde di vibrazione del reticolo prodotte dal movimento vibratorio delle molecole che occupano posizioni relativamente fisse (componente di reticolo) e l'energia trasportata dal flusso libero di elettroni (componente elettronica).



La prima componente, che prevale nelle sostanze non metalliche, dipende fortemente dalla disposizione delle molecole: per solidi cristallini estremamente ordinati (quali i diamanti) arriva ad esser molto più alta di quella dei metalli puri, nei quali invece il meccanismo prevalente è la seconda.

Va osservato tuttavia come i solidi cristallini come il diamante (ma anche i semiconduttori, come il silicio), diversamente dai metalli, buoni conduttori di elettricità e calore, risultino buoni conduttori di calore ma cattivi conduttori elettrici e per questo trovano largo impiego nell'industria

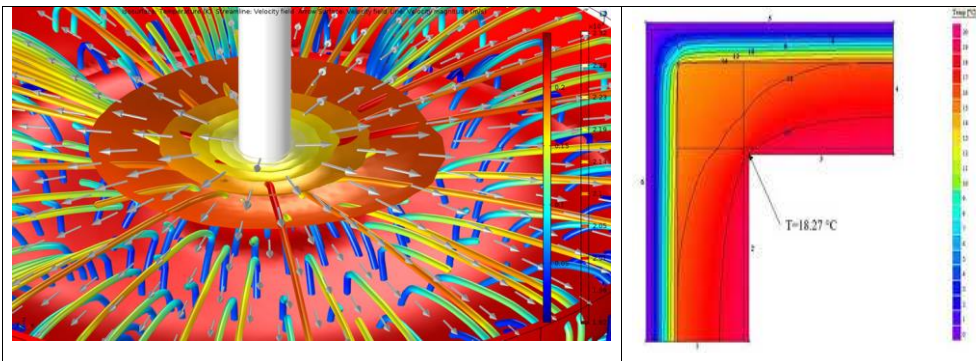
elettronica (vedi dissipatori di diamante usati nel raffreddamento di componenti elettronici particolarmente delicati o oli e guarnizioni di silicio usati nell'assemblaggio).

In un liquido o un gas, invece, le particelle muovendosi urtano tra di loro e con le pareti del contenitore: quando due molecole che possiedono energie cinetiche differenti collidono, una parte dell'energia cinetica della molecola più energetica (a temperatura maggiore) si trasferisce alla molecola meno energetica (a temperatura minore). Maggiore è la temperatura, più velocemente le molecole si muovono, più elevato è il numero di tali collisioni e migliore è la trasmissione del calore. In particolare la teoria cinetica dei gas prevede che la conducibilità termica dei gas sia proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta T ed inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa molare M .

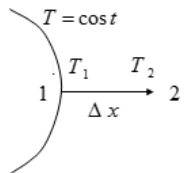
Legge di Fourier

Nella trasmissione di calore un elemento fondamentale è la determinazione della distribuzione di temperatura, esprimibile in generale con la relazione $T = f(x, y, z, t)$, che definisce un campo scalare.

Le superfici caratterizzate da un solo valore di temperatura sono dette *superfici isoterme*, non si intersecano tra loro e si estendono fino ai confini del sistema o si richiudono su se stesse restando tutte all'interno del sistema.



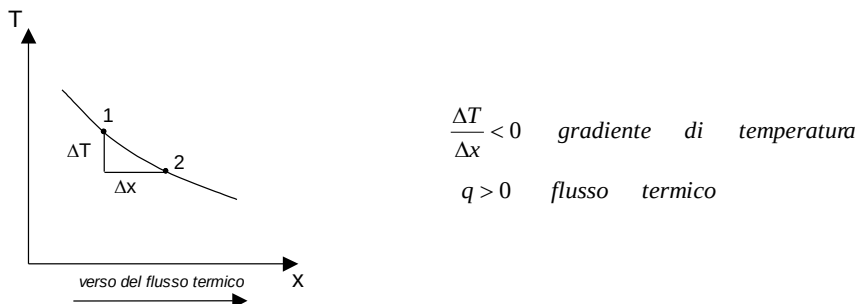
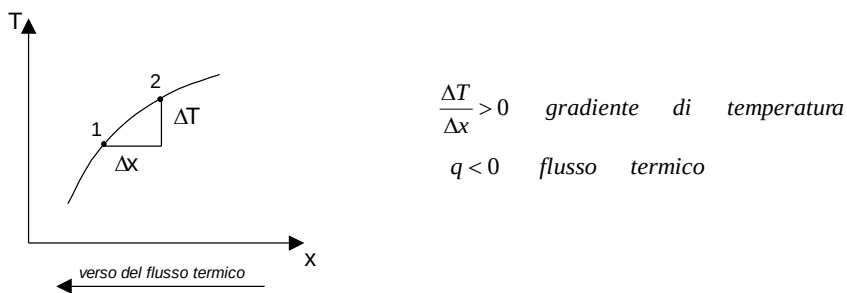
Il **gradiente di temperatura** in un punto del campo è il rapporto tra la variazione di temperatura corrispondente ad un segmento normale alla superficie isoterma passante per quel punto e la lunghezza del segmento stesso.



$$\text{grad}T = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$

Il gradiente di temperatura è orientato positivamente verso le temperature crescenti; con la sua definizione ad esso viene associato un campo vettoriale, le cui linee di forza sono perpendicolari alle superfici isoterme.

Poiché il calore fluisce spontaneamente da punti a temperatura maggiore verso punti a temperatura minore, il flusso di calore ha verso opposto al gradiente di temperatura.



E' possibile definire un nuovo campo vettoriale, quello del flusso di calore, le cui linee di forza coincidono con quelle del campo del gradiente di temperatura, ossia i due vettori flusso e gradiente sono paralleli, ma hanno verso opposto. In particolare il vettore **densità di flusso di calore** q si definisce come la quantità di calore che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie isoterma.

Analiticamente, questa definizione si esprime con la relazione:

$$q = -k \cdot \text{grad} T$$

LEGGE DI FOURIER

dove la costante di proporzionalità k è la **conducibilità termica** del materiale, una grandezza scalare positiva che costituisce una proprietà termofisica del materiale.

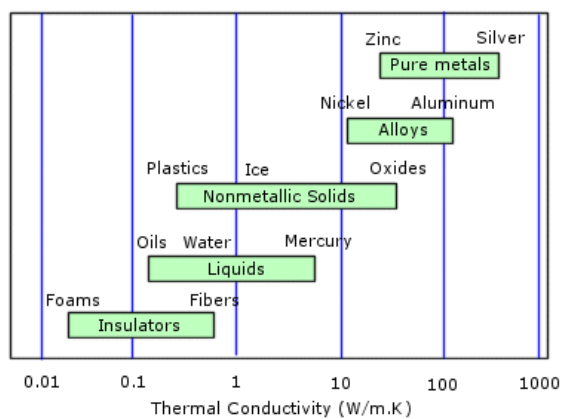
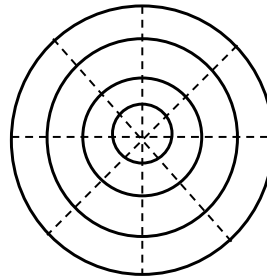
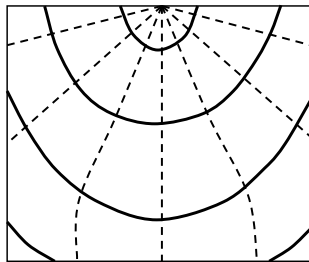
Essa rappresenta la densità di flusso di calore relativa ad un gradiente di temperatura unitario e nel

SI essa si misura in $\frac{(W/m^2)}{(K/m)} = \frac{W}{m \cdot K}$.

In generale k varia con la temperatura, ma in molti problemi ingegneristici la variazione è trascurabile.

ESEMPI DI DISTRIBUZIONI DI TEMPERATURA

— Superfici isoterme
 - - - Linee di flusso termico

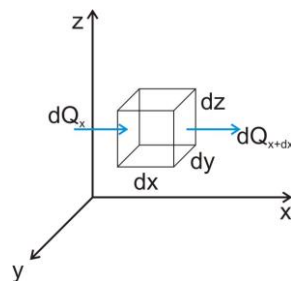




Equazione di FOURIER o equazione generale della conduzione.

Per determinare la distribuzione di temperatura $T(x, y, z)$ è necessario disporre di un'equazione differenziale che esprima come varia la temperatura del mezzo al variare della posizione nello spazio e nel tempo. A tal fine si considera un elemento di volume ΔV (di spigoli dx, dy, dz paralleli agli assi rispettivi) di un sistema omogeneo ed isotropo con conducibilità termica costante k ed in assenza di cambiamenti di fase; il volumetto ΔV sia poi racchiuso da una superficie ΔS .

$$\Delta V = dx \, dy \, dz$$



Il principio di conservazione dell'energia:

$$dE_c + dE_p + dU = dQ - dL$$

nel quale si omettono i termini di lavoro, non essendoci lavoro di deformazione, e di energia cinetica e potenziale, considerando il sistema in quiete rispetto ad un riferimento inerziale, è esprimibile nella forma:

$$\left[\begin{pmatrix} \text{quantità di calore} \\ \text{entrante nel sistema} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{quantità di calore} \\ \text{uscente dal sistema} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \text{quantità di calore prodotta} \\ \text{all'interno del sistema} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{variazione del contenuto di} \\ \text{energia interna del sistema} \end{pmatrix}$$

$$dQ + dQ_g = du.$$

Da tale bilancio è possibile dedurre un'equazione differenziale che lega la temperatura alle coordinate spazio e tempo.

In particolare dQ rappresenta la quantità di calore che nel tempo $d\tau$ attraversa la superficie dS e va pertanto calcolata come flusso del vettore q attraverso dS nel tempo $d\tau$, ossia:

$$dQ = \left(- \int_{\Delta S} q \cdot n \cdot dS \right) d\tau$$

con n versore normale alla superficie dS , orientato nel verso uscente dalla superficie stessa. Utilizzando il teorema di Gauss si ha:

$$dQ = \left(- \int_{\Delta V} \operatorname{div} q \cdot dV \right) d\tau = \left(- \int_{\Delta V} \operatorname{div} (-k \operatorname{grad} T) \cdot dV \right) d\tau = \left(\int_{\Delta V} k \nabla^2 T dV \right) d\tau.$$

La quantità di calore dQ_g prodotta all'interno dell'elemento di volume nel tempo $d\tau$ può valutarsi a partire dalla conoscenza della quantità specifica di calore prodotta nell'unità di tempo e per unità di volume, q_g , il cui valore viene determinato dall'esperienza per i diversi casi che interessano la tecnica:

$$dQ_g = \left(\int_{\Delta V} q_g dV \right) d\tau.$$

La variazione di energia interna è esprimibile come:

$$du = mc dT \Rightarrow \Delta U = \left(\int_{\Delta V} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV \right) d\tau$$

$$\text{dove} \quad m = \int_{\Delta V} \rho dV \quad \text{e} \quad dT = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau.$$

Dividendo per $d\tau$ e raggruppando i tre termini sotto un unico segno di integrale, si ottiene:

$$\left(\int_{\Delta V} k \nabla^2 T dV + \int_{\Delta V} q_g dV - \int_{\Delta V} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV \right) d\tau = 0$$

$$\int_{\Delta V} \left(k \nabla^2 T + q_g - \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) dV = 0$$

Essendo $dV \neq 0$ perché l'integrale sia nullo si deve annullare la funzione integranda. Dividendo infine per ρc si ottiene:

$$\boxed{\alpha \nabla^2 T + \frac{q_g}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial \tau}} \quad \text{EQUAZIONE di FOURIER}$$

dove $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ è detta **diffusività termica** ed è una proprietà termofisica del materiale.

Dimensionalmente si esprime: $\alpha = \frac{\frac{W}{mK}}{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{kgK}} = \frac{m^2}{s}$.

L'equazione di Fourier è un'equazione differenziale lineare in T del 2° ordine, le cui condizioni al contorno sono in generale riconducibili ad uno dei casi seguenti:

- valore assegnato della temperatura sulla superficie di contorno, in funzione della posizione e del tempo;
- valore assegnato del flusso di calore che attraversa la superficie di contorno, in funzione della posizione e del tempo;
- valore assegnato del flusso di calore che attraversa la superficie di contorno, dipendente dalla differenza tra i valori assunti dalla temperatura sulla superficie stessa e ad una distanza tale da non risentire praticamente del fenomeno di scambio termico in atto (quest'ultima condizione contempla il verificarsi di scambio termico superficiale convettivo e/o radiativo).

Per esprimere le varie forme dell'equazione di Fourier è opportuno distinguere tra problemi in cui il tempo non influisce sul valore della temperatura, che è costante nel tempo, e problemi in cui

tale parametro ha la sua importanza; i primi vengono detti di **regime stazionario**, gli altri di **regime non stazionario**, distinguendolo in particolare tra **transitorio o variabile**.

In condizioni stazionarie in qualsiasi punto del sistema la potenza termica entrante deve essere uguale alla potenza termica uscente e non si ha alcuna variazione di energia interna.

In condizioni di regime non stazionario la potenza invece è variabile e la temperatura in ciascun punto varia nel tempo. Poiché una variazione di temperatura sta ad indicare una variazione di energia interna, l'accumulo di energia è peculiare del flusso non a regime:

$$T = T(\tau) \Rightarrow mc\Delta T = \Delta U.$$

In particolare, il termine transitorio viene usualmente riservato a quei problemi nei quali il regime variabile ad un certo momento ha termine e subentra una situazione stazionaria.

Se il regime è stazionario il 2° membro dell'equazione di Fourier si annulla e l'equazione si riduce a:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{q_g}{\rho c} = 0$$

Dividendo per α si ottiene:

$$\nabla^2 T + \frac{q_g}{k} = 0 \quad \text{EQUAZIONE di POISSON}$$

con $\frac{q_g}{k}$ sorgente del campo di temperatura.

Nei casi stazionari in cui non si ha generazione di calore, l'equazione di Fourier si riduce a quella più semplice di Laplace:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{EQUAZIONE di LAPLACE}$$

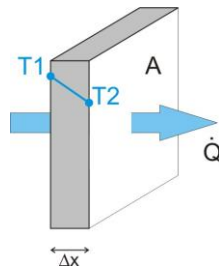
Nel caso di conduzione in regime variabile in un mezzo che non è sede di generazione di calore, l'equazione si riduce a:

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Nel seguito verrà risolta l'equazione generale solo con riferimento al caso più semplice, ossia quello di regime stazionario in assenza di generazione di calore, per una geometria piana.

In tal caso essa diviene:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{con le condizioni al contorno:} \quad \begin{array}{ll} \text{per } x = 0 & T = T_1 \\ \text{per } x = \Delta x & T = T_2 \end{array}$$



Una prima integrazione fornisce:

$$\frac{d}{dx} \frac{dT}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \text{costante} = A$$

ed una seconda integrazione:

$$dT = A dx \quad \Rightarrow \quad T = Ax + B$$

Imponendo le condizioni al contorno si ricavano le costanti:

$$\text{per } x = 0 \quad T = T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = B$$

$$\text{per } x = \Delta x \quad T = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = A\Delta x + B = A\Delta x + T_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$

$$\text{da cui:} \quad T = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} x + T_1$$

che rappresenta una distribuzione lineare di temperatura.

Si osservi come l'andamento della temperatura sia indipendente da k e quindi dal materiale attraversato, mentre è funzione solo del suo spessore Δx e della temperatura sulle due facce.

Dalla legge di Fourier si può poi ricavare il flusso termico:

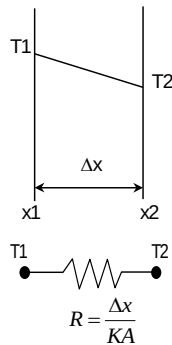
$$q = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x}{k}}$$

Conduzione monodimensionale stazionaria senza sorgente di calore

Le espressioni del flusso termico vengono di seguito ricavate per tre diverse geometrie (strato piano, strato cilindrico, guscio sferico) utilizzando la legge di Fourier, di più semplice risoluzione.

Strato piano

Consideriamo uno strato di materiale omogeneo ed isotropo, delimitato da due superfici piane e parallele di estensione infinita, mantenute a temperatura costante ed uniforme. Dalla legge di Fourier, separando le variabili ed integrando si ottiene:



$$q = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow q \int_{x_1}^{x_2} dx = -kA \int_{T_1}^{T_2} dT$$

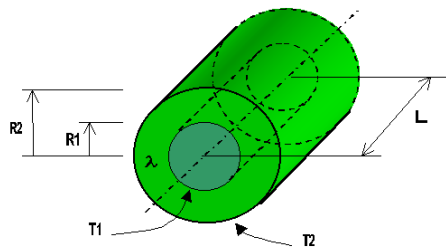
$$q(x_2 - x_1) = -kA(T_2 - T_1)$$



$$q = \frac{-kA(T_2 - T_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x / kA}$$

$R = \Delta x / kA = \text{resistenza termica}$

Cilindro Cavo



Dall'equazione di Fourier:

$$q = -kA \frac{dT}{dr} \Rightarrow q = -k2\pi rL \frac{dT}{dr}$$

Separando le variabili:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{k2\pi L} \frac{dr}{r} = \int_{T_1}^{T_2} -dT$$

ed integrando: $q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL} \right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_1}$

T_1  T_2 $R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$

Guscio sferico

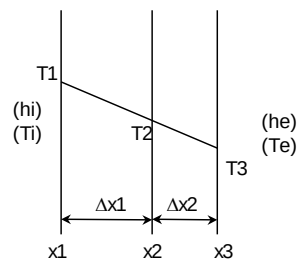
L'esistenza di una tale analogia consente quindi di realizzare modelli elettrici per mezzo dei quali è possibile prevedere il comportamento termico di strutture complesse, che difficilmente potrebbero essere studiate analiticamente.

Sistemi composti

Si analizzeranno nel seguito le due tipologie più comuni, ossia i sistemi composti piani e quelli cilindrici.

a) Piani

Per una lastra composta da più strati (nel seguito ci riferiremo a due), essendo il flusso termico in regime stazionario lo stesso in ogni elemento, si ha:



$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1 / k_1 A} = \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2 / k_2 A}$$

Esplicitando le differenze di temperatura:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= qR_1 \\ T_2 - T_3 &= qR_2 \end{aligned}$$

e sommando membro a membro:

$$T_1 - T_3 = q(R_1 + R_2) \Rightarrow q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A}} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

Generalizzando, si può affermare che il flusso di calore attraverso più elementi in serie è uguale al rapporto fra la differenza globale di temperatura e la somma delle resistenze termiche.

Se esistono condizioni al contorno di tipo convettivo, la parete di sinistra è a contatto con un fluido a temperatura T_i mentre l'altra è a contatto con un fluido a temperatura T_e , si ha:

$$q = h_i A (T_i - T_1) = \frac{T_i - T_1}{1/h_i A} = h_e A (T_3 - T_e) = \frac{T_3 - T_e}{1/h_e A}$$

$$\text{da cui } q = \frac{T_i - T_1}{1/h_i A} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1 / k_1 A} = \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2 / k_2 A} = \frac{T_3 - T_e}{1/h_e A}$$

Sommando, dopo avere esplicitato le differenze di temperatura, si ottiene:

$$q = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i A} + \frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_e A}} = \frac{T_i - T_e}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

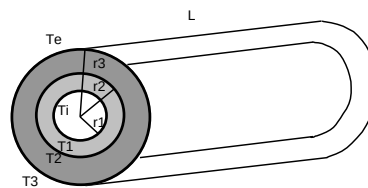
$$q = \frac{T_i - T_e}{\sum_i R_i} \quad \sum_i R_i = \frac{1}{h_i A} + \frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_e A}$$

Si semplifica la scrittura combinando le singole resistenze nel **coefficiente globale di scambio termico** U :

$$q = UA \Delta T_{tot} \quad \text{dove} \quad UA = \frac{1}{\sum R_i}.$$

b) cilindrici

Si consideri un sistema cilindrico costituito da due strati di materiale lambito all'interno ed all'esterno da due fluidi, rispettivamente a temperatura T_i e T_e , che scambiano calore per convezione con le superfici del cilindro. Si ha:



$$\text{per la superficie interna: } q = \frac{T_i - T_1}{1/2\pi r_1 L h_i} = \frac{T_i - T_1}{R_1}$$

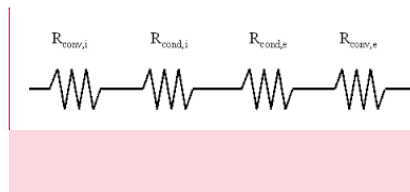
per il cilindro interno: $q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L}} = \frac{T_1 - T_2}{R_2}$

per il cilindro esterno: $q = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L}} = \frac{T_2 - T_3}{R_3}$

per la superficie esterna: $q = \frac{T_3 - T_e}{\frac{1}{2\pi r_3 L h_e}} = \frac{T_3 - T_e}{R_4}$.

Esplicitando le differenze di temperatura:

$$\begin{aligned} T_i - T_1 &= qR_1 \\ T_1 - T_2 &= qR_2 \\ T_2 - T_3 &= qR_3 \\ T_3 - T_e &= qR_4 \end{aligned}$$



Commentato [u1]:

e sommando membro a membro:

$$T_i - T_e = q(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \Rightarrow q = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_e}}$$

Utilizzando il **coefficiente globale di scambio termico** U :

$$q = UA\Delta T_{tot} \quad \text{dove} \quad UA = \frac{1}{\sum R_i}.$$

Nel caso di geometria cilindrica, essendo le superfici diverse, il coefficiente U può essere riferito a qualsiasi area: per evitare confusioni, dovrebbe tuttavia sempre essere precisata l'area di riferimento. Essendo il diametro esterno più facile da misurare, di solito si usa l'area della superficie esterna $A_e = 2\pi r_3 L$, indicando il coefficiente globale come U_e .

Dividendo per A_e si ottiene:

$$U = \frac{1}{\frac{2\pi r_3 L}{2\pi r_1 L h_i} + \frac{2\pi r_3 L \ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} + \frac{2\pi r_3 L \ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{2\pi r_3 L}{2\pi r_3 L h_e}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_e}}$$

Spessore critico dell'isolante

Dalle espressioni dei flussi termici scritti per il cilindro esterno e la superficie esterna risulta come un aumento di r_3 , ossia dello spessore dell'isolante, faccia aumentare logaritmicamente la resistenza termica dovuta alla conduzione, ma nel contempo riduca linearmente la resistenza termica di convezione.

La relazione fra calore trasmesso e spessore dell'isolante può studiarsi quantitativamente analizzando l'espressione sviluppata per i cilindri coassiali. Essendo in molte situazioni pratiche la resistenza termica concentrata nell'isolante e sulla superficie esterna, si semplificherà l'equazione supponendo che T_i sia la temperatura della superficie interna dell'isolante. In tal caso ciò equivale a considerare lo strato più interno (il tubo) sottile e di k elevata (metallo), così da poter trascurare il salto termico su di esso. Pertanto:

$$q = \frac{T_i - T_e}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_e}} = \frac{2\pi L(T_i - T_e)}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{r_3 h_e}}.$$

$$\text{Pertanto } f(r_3) = \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{r_3 h_e}.$$

Derivando ed uguagliando a zero per ricavare il massimo o minimo si ha:

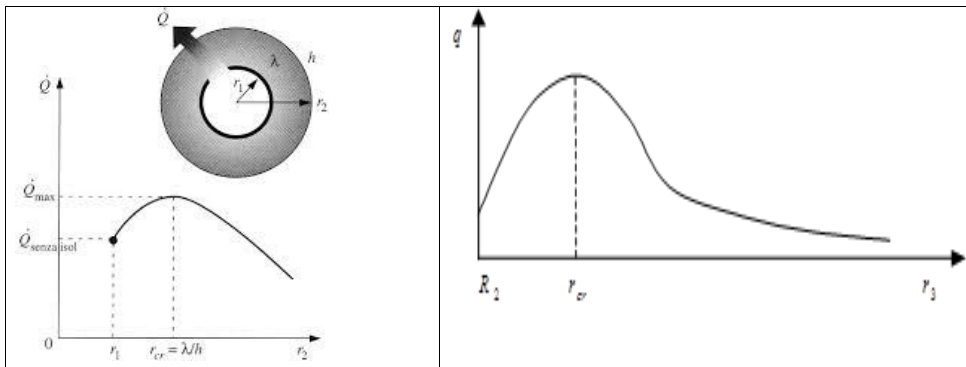
$$f'(r_3) = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} - \frac{1}{h_e} \cdot \frac{1}{r_3^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_3} - \frac{1}{h_e} \cdot \frac{1}{r_3^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_3} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{h_e r_3} \right) = \frac{1}{r_3} \left(\frac{h_e r_3 - k_2}{k_2 h_e r_3} \right) \Rightarrow r_{3cr} = \frac{k_2}{h_e}$$

Per verificare se tale valore è un massimo o un minimo, si calcola la derivata seconda in $r_3 = r_{3cr}$:

$$f''(r_{3cr}) = -\frac{1}{k_2 r_{3cr}^2} + \frac{1}{h_e} \cdot \frac{2r_{3cr}}{r_{3cr}^4} = -\frac{1}{k_2 \left(\frac{k_2}{h_e}\right)^2} + \frac{1}{h_e} \cdot \frac{2}{\left(\frac{k_2}{h_e}\right)^3} = -\frac{h_e^2}{k_2^3} + \frac{2h_e^3}{h_e k_2^3} = \frac{h_e^2}{k_2^3} > 0.$$

Quindi $r_{3cr} = \frac{k_2}{h_e}$ è un minimo per la funzione, che rappresenta il denominatore della frazione, per cui q ha un massimo per $r_3 = r_{3cr}$. Si ottiene in particolare l'andamento riportato in figura, dal quale si evince che se $r < r_{3cr}$ le perdite di calore aumentano con l'aggiunta di materiale isolante mentre se $r > r_{3cr}$ esse decrescono per aggiunta di materiale isolante. Per $r_3 \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$. Nei casi pratici tuttavia k_2 è molto piccolo ed il r_{cr} è più piccolo dello spessore del tubo nudo per cui è sempre utile isolare.

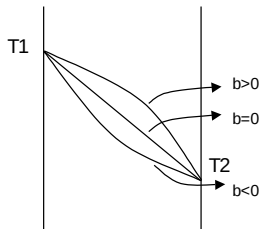


Conducibilità termica variabile.

La dipendenza della conducibilità termica dalla temperatura viene solitamente espressa mediante una relazione lineare: $k = k_0(1 + bT)$.

L'andamento della temperatura dipende dal valore e dal segno di b : se $b > 0$ k cresce con la temperatura, il materiale è buon conduttore ad elevata temperatura e cattivo conduttore a bassa temperatura. Il contrario si ha per $b < 0$, nel qual caso k decresce con la temperatura.

Per ottenere il profilo di temperatura, derivando rispetto alla temperatura la relazione si ha:



$$\frac{dk}{dT} = k_0 b$$

$$\frac{dk}{dT} > 0 \text{ se } b > 0$$

$$\frac{dk}{dT} < 0 \text{ se } b < 0$$

$$\frac{dk}{dT} = 0 \text{ se } b = 0.$$

ossia se $b > 0$ la concavità è rivolta verso il basso, se $b < 0$ verso l'alto, se $b = 0$ l'andamento è lineare. In tal caso la legge di Fourier diventa:

a) strato piano

$$q = -k_0(1 + bT)A \frac{dT}{dx} \quad \text{separando le variabili ed integrando:}$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{A} \int_{x_1}^{x_2} dx &= - \int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + bT) dT \\ \frac{q}{A} (x_2 - x_1) &= -k_0 \left[T + \frac{b}{2} T^2 \right]_{T_1}^{T_2} = -k_0 \left[(T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right] = \\ &= -k_0 \left[(T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1) \right] = -k_0 (T_2 - T_1) \cdot \left[1 + b \left(\frac{T_2 + T_1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

e calcolando il valore medio di k :

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{k_0(1 + bT_1) + k_0(1 + bT_2)}{2} = \frac{k_0 + k_0 b T_1 + k_0 + k_0 b T_2}{2} = \\ &= \frac{2k_0 + k_0 b (T_1 + T_2)}{2} = k_0 + k_0 b \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) = k_0 \left[1 + b \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

si ha:

$$\frac{q \Delta x}{A} = -k_m (T_2 - T_1) \Rightarrow$$

$$\frac{q}{A} = k_m \frac{T_1 - T_2}{\Delta x}$$

b) cilindro cavo

$$q = -k_0(1 + bT) \cdot (2\pi rL) \frac{dT}{dr}$$

Separando le variabili ed integrando:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi rL} dr = - \int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + bT) dT$$

Il secondo membro è uguale all'espressione sviluppata nel caso dello strato piano per cui, utilizzando il valore medio di k , si avrà:

$$\frac{q}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = -k_m(T_2 - T_1)$$

da cui: $q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_m L}}$

c) guscio sferico

$$q = -k_0(1 + bT) \cdot (4\pi r^2) \frac{dT}{dr}$$

separando le variabili ed integrando:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi r^2} dr = - \int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + bT) dT$$

Anche, qui, analogamente al caso precedente:

$$\frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -k_m (T_2 - T_1) \quad \text{da cui:}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4\pi k_m} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

Conduzione monodimensionale stazionaria con generazione di calore

Esempi caratteristici di sistemi con generazione di calore sono le bobine elettriche, le resistenze elettriche, i reattori nucleari e la combustione di una caldaia. Il caso più semplice si ha quando la generazione di calore è costante nel tempo e nello spazio, come accade nei conduttori percorsi da corrente elettrica, sede di generazione di calore per effetto *Joule*.

La base dello studio termico è data dall'equazione di *Poisson*:

$$\nabla^2 T + \frac{q_g}{k} = 0$$

Utilizzando le coordinate cilindriche e supponendo che la distribuzione di temperatura dipenda solo dalla distanza radiale r , l'equazione si caratterizza:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} + \frac{q_g}{k} = 0$$

Per un conduttore di sezione cilindrica avente raggio r_0 , lunghezza L , e percorso da una corrente I sotto una tensione V , q_g rappresenta la quantità di calore dissipata per effetto Joule per unità di volume, che vale:

$$q_g = \frac{I^2 R}{V} = \frac{V \cdot I}{\pi r_0^2 L}.$$

Si utilizzano due condizioni al contorno del tipo:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{e} \quad T = T_s \quad \text{per} \quad r = r_0$$

dove T_s è la temperatura della superficie esterna del conduttore.

Moltiplicando l'equazione per $r \cdot dr$ si ha:

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} dr + \frac{dT}{dr} dr + \frac{q_g}{k} r \cdot dr = 0$$

Posto poi: $t = \frac{dT}{dr}$, si ha $dt = \frac{d^2 T}{dr^2} dr$

l'equazione diviene:

$$r \cdot dt + t \cdot dr + \frac{q_g}{k} r \cdot dr = 0, \text{ ossia}$$

$$d(rt) = -\frac{q_g}{k} r \cdot dr,$$

che è un'equazione differenziale a variabili separate. Integrando si ha:

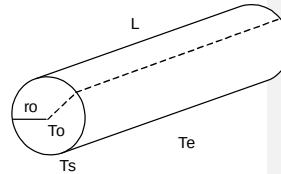
$$rt = -\frac{q_g}{k} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1.$$

$$\text{Essendo } t = \frac{dT}{dr} \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = -\frac{q_g}{k} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1.$$

Si determina C_1 dalla condizione al contorno $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ e quindi:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{q_g}{k} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{dT}{dr} = -\frac{q_g}{k} \cdot \frac{r}{2}.$$

Integrando ancora, separando le variabili:



$$dT = -\frac{q_g}{k} \cdot \frac{r}{2} dr \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{q_g}{k} \cdot \frac{r^2}{4} + C_2.$$

Si ricava C_2 imponendo la condizione al contorno $T = T_s$ per $r = r_0$,

$$T + \frac{q_g}{k} \cdot \frac{r_0^2}{4} = C_2,$$

da cui l'andamento della temperatura risulta:

$$T = -\frac{q_g r^2}{4k} + \frac{q_g r_0^2}{4k} + T_s = T_s + \frac{q_g r_0^2}{4k} (r_0^2 - r^2) = T_s + \frac{q_g r_0^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right].$$

La temperatura massima si ottiene annullando la derivata prima:

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2 \cdot r \cdot q_g}{4k} = -\frac{r \cdot q_g}{2k} = 0 \quad \text{per} \quad r = 0.$$

Per verificare se $r = 0$ è un massimo o un minimo si calcola la derivata seconda:

$$\frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{q_g}{2k} < 0, \text{ per cui è un massimo. La temperatura è quindi massima sull'asse e vale:}$$

$$T = T_s + \frac{q_g r_0^2}{4k}.$$

Condizione bidimensionale stazionaria senza generazione di calore

In tal caso l'equazione che regge la distribuzione di temperatura è la seguente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{se } k \text{ è uniforme.}$$

La separazione delle variabili rappresenta l'approccio classico alla soluzione dell'equazione, che qui verrà illustrata applicandola ad un problema relativamente semplice: una piastra rettangolare sottile senza sorgenti di calore e con le superfici superiore ed inferiore isolate.

L'equazione è un'equazione differenziale a derivate parziali lineare ed omogenea, che può essere integrata assumendo per $T(x, y)$ una soluzione prodotto della forma: $T(x, y) = X(x)Y(y)$, in cui X è funzione di x soltanto e Y di y soltanto. Sostituendo si ha:

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2}.$$

Poiché il primo membro è funzione solo di x ed il secondo solo di y , l'eguaglianza può sussistere solo se ambedue i membri sono eguali ad un valore costante (es. a^2). Si ottengono pertanto le due equazioni differenziali alle derivate totali:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + a^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - a^2 Y &= 0 \end{aligned}$$

Conduzione monodimensionale in regime variabile senza generazione di calore

Si considererà qui il caso più semplice, cioè la conduzione in uno strato piano costituito da un materiale omogeneo ed isotropo, che non è sede di generazione di calore ($q_g = 0$) e per il quale le proprietà termofisiche non dipendono dalla temperatura. In tal caso l'equazione:

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

diviene:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau},$$

che è un'equazione differenziale alle derivate parziali lineare ed omogenea, che può essere integrata assumendo per $T(x, \tau)$ una soluzione costituita dal prodotto di due funzioni, ciascuna di una sola variabile, ossia: $T(x, \tau) = X(x)\theta(\tau)$. Sostituendo si ottiene:

$$\alpha \theta \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d\theta}{d\tau}$$

separando le variabili

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \theta} \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Poiché il primo membro è funzione solo di x ed il secondo solo di τ , affinché possa sussistere l'eguaglianza dei due membri è necessario che ambedue siano uguali ad una stessa costante, ossia non risultino funzioni né della x né della τ . Ponendo questa costante pari a $(-a^2)$, si hanno le due equazioni differenziali alle derivate totali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -a^2 \\ \frac{1}{\alpha \theta} \frac{d\theta}{d\tau} &= -a^2 \end{aligned}$$

dove a^2 è una costante il cui valore va determinato in base alle condizioni al contorno. La scelta di un valore negativo per la costante garantisce un andamento della temperatura in diminuzione nel tempo, in conformità con il secondo principio della termodinamica.

Conduzione bi e tri dimensionale in regime permanente.

Può essere trattata con metodi:

- analitici;
- grafici;

- analogici;
- numerici.

Metodi Analitici.

Richiedono la conoscenza di funzioni matematiche estremamente avanzate, per cui in genere vengono limitati alla soluzione di problemi relativamente semplici (es. sistema bidimensionale senza generazione di calore).

Metodi Grafici.

Vengono utilizzati prevalentemente per sistemi bidimensionali geometricamente complessi con contorni isotermi o isolati. Lo scopo di una soluzione grafica è la costruzione di una rete di isoterme e di linee a flusso termico costante.

Queste ultime sono tangenti alla direzione del flusso termico in ogni punto e quindi non può aversi passaggio di calore attraverso di esse, mentre attraverso ciascuna coppia di esse fluisce una quantità di calore costante; attraverso le isoterme il calore fluisce invece in direzione perpendicolare: pertanto, le linee a temperatura costante ed a flusso termico costante si intersecano ortogonalmente.

Graficamente la distribuzione di temperatura consiste in un disegno in scala in cui sono tracciate le isoterme e le linee di flusso formando una rete di quadrati curvilinei. La soluzione grafica è unica.

Metodi Analogici.

La formale eguaglianza fra le equazioni che regolano i fenomeni termici e quelli elettrici consente di utilizzare alcuni risultati analitici propri della teoria dell'elettricità anche per lo studio della trasmissione del calore. Il comportamento termico di strutture complesse, difficili da trattare con metodi analitici, viene pertanto studiato realizzando dei modelli elettrici analoghi.

Metodi Numerici.

Quando la geometria del sistema e le condizioni al contorno sono tanto complicate da non consentire né la soluzione analitica, né l'analogica si può ricorrere alle soluzioni numeriche.

Per risolvere numericamente un problema di conduzione si suddivide il sistema in un numero piccolo di sottovolumi uguali e si suppone che ciascun sottovolume si trovi alla temperatura del suo punto centrale (*punto nodale*). Si considera che il trasporto di calore avvenga solo tra i punti nodali

e che l'energia si immagazzini solo in essi, come se fossero collegati da barre fittizie che agiscono nei confronti del flusso come conduttori – resistenze.

In condizioni di regime stazionario, la potenza termica che fluisce verso ciascun punto nodale deve essere uguale alla potenza termica che fluisce dal punto nodale (*Kirkhoff*). Per soddisfare questa condizione si effettua un bilancio termico in ogni punto nodale, ottenendo tante equazioni algebriche quanti sono i punti nodali, che consentono di determinarne le temperature.

Per il sistema di figura a), relativamente al punto n_i , si ha:

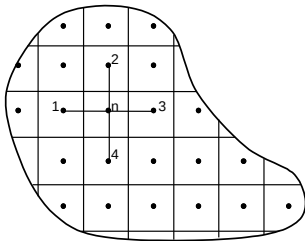
$$q_{1 \rightarrow n} + q_{2 \rightarrow n} + q_{3 \rightarrow n} + q_{4 \rightarrow n} = 0$$

$$\frac{k \cdot A \cdot \Delta T_1}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_2}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_3}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_4}{L} = 0$$

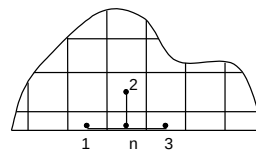
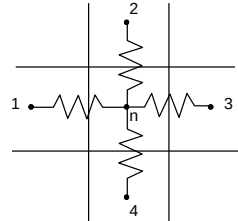
ed essendo k, A, L uguali per tutti i quadrati si ha:

$$T_1 - T_n + T_2 - T_n + T_3 - T_n + T_4 - T_n = 0 \quad (\text{equazione della temperatura al nodo } n)$$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_n = 0$$



a)



b)

Se un punto nodale è esterno, figura b), solo metà della superficie associata alla conduzione fra punti interni è coinvolta. Se in particolare essa è soggetta a scambio termico convettivo si ha:

$$\frac{k \cdot A \cdot \Delta T_1}{2L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_2}{L} + \frac{k \cdot A \cdot \Delta T_3}{2L} + h \cdot A \cdot \Delta T_a = 0$$

$$\frac{(T_1 - T_n)}{2} + (T_2 - T_n) + \frac{(T_3 - T_n)}{2} + \frac{hL}{k}(T_A - T_n) = 0$$

Conduzione in regime non permanente.

Se la potenza termica in un sistema non varia nel tempo, ossia è costante, la temperatura in ciascun punto non cambia e si hanno condizioni stazionarie: in qualsiasi punto del sistema la potenza termica entrante deve essere uguale alla potenza termica uscente e non si ha alcuna variazione di energia interna.

Quando la potenza varia, la trasmissione ha invece luogo in condizioni di regime non stazionario e la temperatura in ciascun punto varia nel tempo: poiché una variazione di temperatura sta ad indicare una variazione di energia interna, l'accumulo di energia è peculiare del flusso non a regime.

Un tipico problema di conduzione in regime non stazionario riguarda quei sistemi per i quali, una volta iniziato un processo di scambio termico, prima che scompaiano le condizioni transitorie e siano raggiunte condizioni di regime stazionario deve passare del tempo.

Altri due tipi di problema di conduzione non a regime che spesso si riscontrano in ingegneria riguardano i sistemi soggetti a variazioni periodiche di temperatura e di flusso termico e quelli in cui la temperatura in ogni istante è uniforme in tutto il sistema, ossia è solo funzione del tempo.

Flusso termico transitorio in sistemi con resistenza interna trascurabile

Molti problemi di flusso termico transitorio possono essere risolti rapidamente con accettabile precisione assumendo che la resistenza conduttiva interna del sistema sia così piccola che nel sistema stesso in ogni istante la temperatura sia sostanzialmente uniforme.

Questa semplificazione è giustificata quando la resistenza termica esterna tra la superficie del sistema ed il mezzo circostante è tanto grande in confronto a quella interna, da controllare il processo di scambio termico. Una misura della relazione fra le resistenze è data dal loro rapporto:

$$\frac{R_i}{R_e} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{hL}{K},$$

in forma adimensionale, con h coefficiente di convezione del mezzo fluido circostante, k coefficiente conducibilità termica del corpo ed L una sua lunghezza significativa, che si ottiene dividendo il volume del corpo per l'area della superficie. Il rapporto prende il nome di numero di Biot Bi . Se $Bi < 0,1$ ossia $R_i < 10\% R_e$, l'errore introdotto con l'ipotesi effettuata è $< 5\%$.

Un esempio di questo tipo di problema è il raffreddamento di un piccolo corpo che venga estratto da un forno a temperatura uniforme T_0 e si immerga in un bagno di raffreddamento a temperatura T_e costante, così rapidamente da potere approssimare la variazione della temperatura ambiente con una variazione a gradino.

Il bilancio di energia in un piccolo intervallo di tempo dt si scrive:

$$dU = q$$

$$c\rho VdT = -hA(T - T_e)dt$$

(il segno $-$ indica che l'energia qdt è ceduta dal corpo)

$$\frac{dT}{T - T_e} = -\frac{hA}{c\rho V} dt$$

che, essendo T_e costante, può anche scriversi come:

$$\frac{d(T - T_e)}{T - T_e} = -\frac{hA}{c\rho V} dt$$

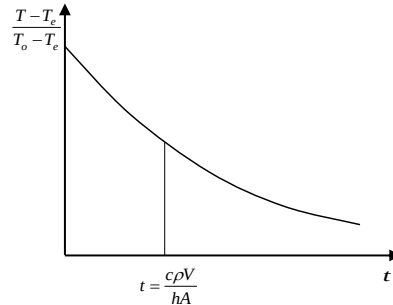
Integrando fra il tempo $t = 0$ ed il tempo $t = t$, con condizioni al contorno:

$T = T_0$ per $t = 0$, $T = T$ per $t = t$, si ha:

$$\ln[(T - T_e)]_{T_0}^T = \left[-\frac{hA}{c\rho V} t \right]_0^t$$

$$\ln \left[\frac{(T - T_e)}{T_0 - T_e} \right] = - \frac{hA}{c\rho V} t$$

$$\frac{(T - T_e)}{T_0 - T_e} = e^{\left(\frac{hA}{-c\rho V} t \right)}$$



La quantità $\frac{c\rho V}{hA}$ prende il nome di *costante di tempo del sistema* poiché ha le dimensioni di un tempo. Il suo valore indica la velocità di risposta di un sistema ad una sola capacità ad una improvvisa variazione della temperatura ambiente. Per $t = \frac{c\rho V}{hA}$ la differenza di temperatura è pari al 36,8% della differenza iniziale $(T_0 - T_e)$.

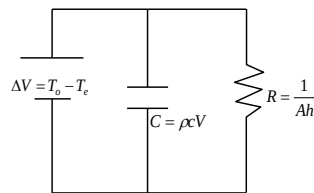
La rete elettrica equivalente alla rete termica è rappresentata in figura. Il sistema è costituito da una sola capacità, che, caricata al potenziale T_0 , si scarica attraverso la resistenza $\frac{1}{hA}$.

I risultati si possono esprimere mediante parametri adimensionali. Essendo $\frac{V}{A} = L$ l'esponente diviene:

$$- \frac{hA}{c\rho V} dt = \frac{ht}{\rho cL}.$$

Moltiplicando e dividendo per Lk si ha:

$$\frac{ht}{\rho cL} \cdot \frac{kL}{kL} = \left(\frac{hL}{k} \right) \left(\frac{kt}{\rho cL^2} \right) = Bi \cdot \frac{\alpha t}{L^2}.$$



Posto $F_o = \frac{\alpha t}{L^2}$ (n° di Fourier) si ha:

$$\frac{ht}{\rho cL} = Bi \cdot F_o \quad \text{e} \quad \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = e^{Bi \cdot F_o}.$$

Lo studio è stato effettuato per i valori della temperatura ambiente costante: esistono tuttavia molti problemi in cui la temperatura del mezzo che circonda il sistema varia nel tempo. In tal caso l'equazione da utilizzare è identica, salvo che essendo $T_e = T_e(t)$ non possono separarsi le variabili. Si procede ancora raccogliendo al 1° membro i termini contenenti la temperatura T del sistema ed al 2° membro i termini contenenti la temperatura esterna T_e :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hA}{\rho cV}(T - T_e) = 0$$

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{hA}{\rho cV}T(t) = \frac{hA}{\rho cV}T_e(t).$$

L'integrale generale, per una assegnata variazione di $T_e(t)$ sarà dato dalla somma di due termini: il primo, T_{rs} , detto integrale particolare, soddisfa l'equazione e non contiene costanti arbitrarie; fisicamente esso rappresenta la dipendenza della temperatura dal tempo dopo l'estinzione dei fenomeni transitori (questa parte della soluzione viene spesso chiamata a regime permanente).

Il secondo termine, T_t , si ottiene imponendo che il 2° membro sia nullo, e fornisce così le costanti di integrazione, i cui valori devono ricavarsi per mezzo delle condizioni al contorno. Tale termine fisicamente rappresenta la risposta della temperatura del sistema durante il regime transitorio, che si estingue comunque esponenzialmente in modo analogo al caso in cui T_e è costante. Pertanto:

$$T = T_{rs} + T_t.$$

Tale tecnica può essere estesa ad ogni tipo di variazione periodica di temperatura dato che quasi tutte le funzioni periodiche del tempo possono esprimersi in serie di Fourier.

Diagrammi.

Per la conduzione in transitorio, per parecchie geometrie semplici, sottoposte a condizioni al contorno di importanza pratica, la distribuzione di temperatura ed il flusso termico sono disponibili sotto forma di diagrammi o tabelle.